LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS INVERSES DES TRANSCENDANTES

ET

LES SURFACES ISOTHERMES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS INVERSES DES TRANSCENDANTES

ET

LES SURFACES ISOTHERMES,

Gabriel

PAR G. LAMÉ.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1857

BUT ET MARCHE DE CET OUVRAGE.

Les transcendantes elliptiques de première espèce, et leurs fonctions inverses, se présentent maintenant dans toutes les recherches analytiques ayant pour but d'étendre le champ des mathématiques appliquées. Leur étude ne peut donc tarder à s'introduire dans l'enseignement classique. Le Cours actuel a pour objet principal d'indiquer comment il conviendrait de diriger cette étude.

La théorie dont il s'agit, inaugurée par des formules dues à Euler, n'avait fait que des progrès lents et pénibles pendant un demi-siècle, lorsque Abel reconnut la double périodicité des fonctions inverses, et résolut généralement le problème de la multiplication des transcendantes. Presque immédiatement, Jacobi trouva la solution générale du problème de leur transformation. Ainsi s'est élevée la branche d'analyse qui est aujourd'hui considérée comme étant la plus féconde ou la plus riche d'avenir.

Peu d'années après ces deux grandes découvertes, ayant introduit la considération des surfaces isothermes dans la théorie analytique de la chaleur, et voulant traiter l'ellipsoïde à trois axes inégaux, j'ai rencontré le système des coordonnées elliptiques, formé par trois familles de surfaces isothermes du second ordre, homofocales et orthogonales. Or, dans ce système, les trois variétés des transcendantes elliptiques de première espèce expriment respectivement la température sur les trois familles considérées isolément, et les fonctions inverses des transcendantes sont les axes mêmes de ces surfaces. De plus, les nouvelles coordonnées m'ont conduit à un nouveau genre de développement en série d'une fonction donnée; et les termes de la série sont les produits de polynômes, entiers et rationnels, de tous les degrés, formés par les fonctions inverses ou par les axes des surfaces conjuguées.

Cette application, qui a suivi de si près les découvertes théoriques, donne la définition la plus simple et la plus naturelle des transcendantes elliptiques de première espèce et de leurs fonctions inverses. Prise pour point de départ, et comme cadre d'étude, elle éclaircit singulièrement la théorie des nouvelles transcendantes, et même celle des anciennes. Elle conduit, sans difficulté et sans lacune, aux problèmes résolus par Euler, Abel, Jacobi, et ramène à l'unité les formules multiples de chaque solution. Enfin elle régularise l'emploi des coordonnées elliptiques, source d'un grand nombre de recherches importantes, et qui, substituées aux coordonnées sphériques habituelles, doivent généraliser et transformer avec avantage toutes les branches de la physique mathématique, à commencer par la mécanique céleste.

Telle est la marche que j'ai adoptée. Quelques mots maintenant pour répondre à deux objections que l'on pourrait faire dès l'abord, l'une au titre de l'ouvrage, l'autre à son début.

Se proposer d'étudier exclusivement les fonctions inverses, n'est-ce pas négliger l'objet principal, pour ne s'occuper que d'un détail secondaire? L'illusion sera facilement détruite. La variable qu'exprime une intégrale transcendante est toujours, par sa nature propre, une quantité sans limites nécessaires, ou qui peut avoir toutes les valeurs comprises entre les deux infinis, négatif et positif : c'est, ou l'arc de cercle dans les questions de géométrie, ou le temps dans les problèmes de dynamique, ou la température sur une famille de surfaces isothermes; voilà essentiellement la variable indépendante. L'autre variable, celle qui entre sous le signe *somme*, est au contraire très-dépendante : elle a le plus souvent des limites finies infranchissables, qu'elle atteint périodiquement; telle est la véritable fonction, celle dont il importe principalement d'étudier les propriétés. La transcendante elle-même n'a relativement qu'une importance secondaire : car la valeur numérique de la période, et plus généralement celle de l'intégrale entre des limites données, peuvent toujours s'obtenir approximativement à l'aide d'un développement en série convergente.

Autrement : La variable indépendante étant assignée, dans une recherche analytique, d'après le caractère qui vient d'être défini, s'il faut déterminer une fonction de cette variable dont on connaît seulement la première dérivée, il y a réellement deux cas à considérer : celui où cette dérivée est donnée à l'aide de la variable indépendante, et celui où elle est exprimée à l'aide de la fonction. Le premier cas se résout par la méthode des quadratures; le second exige l'emploi de la méthode d'étude des fonctions inverses. De là résultent deux branches distinctes du calcul intégral, l'une seule classiquement enseignée, l'autre, dont j'ai voulu rédiger le premier chapitre, et qui est la plus importante pour les applications.

Partir d'une équation aux différences partielles, lorsqu'il s'agit d'étudier des fonctions d'une seule variable, n'est-ce pas aller à l'encontre des idées reçues sur l'ordre des matières qui composent le calcul infinitésimal? Cette objection pourrait être sérieuse en vue d'un cours d'analyse pure, mais en vue des mathématiques appliquées, la classification est toute différente. Là les équations aux différences partielles se présentent les premières, et ce n'est qu'en procédant à leur intégration qu'on arrive aux équations différentielles ordinaires. Il existe d'ailleurs une analogie remarquable entre la méthode d'étude des fonctions inverses, et celle de l'intégration des équations aux différences partielles; la première rentre en quelque sorte dans la seconde; et, de plus, l'une et l'autre procèdent par vérification.

Si, dans la suite de l'ouvrage, d'autres objections peuvent naître, je pense que le texte et les réflexions qu'il contient suffiront pour les réfuter. (Cependant, à l'une d'elles la réponse manquerait, sans une addition que j'indique ici à cause de son importance : il s'agit des tableaux (10) et (11), pages 84 et 85, qui ne remplissent qu'imparfaitement leur objet, et qu'il faut modifier d'après la règle établie au commencement de l'appendice à la douzième leçon.)

La notation que j'ai employée étant exigée par la définition d'où je suis parti, et par les applications qui terminent le Cours, il était essentiel de traduire, dans son langage, les découvertes d'Euler, d'Abel et de Jacobi. Je ne crois pas que cette traduction leur ait nui; il me semble même qu'elle les a éclaircies et simplifiées, en permettant d'exprimer chacune d'elles par une seule formule.

Les dénominations que j'ai introduites m'ont paru nécessaires, pour signaler des origines, rappeler des propriétés caractéristiques, constater des analogies ou des différences. Il en est dont je me suis d'abord servi, comme résumant les propriétés reconnues par une première étude, et que j'ai dû abandonner ou rejeter, après une étude plus complète qui démontrait leur insuffisance.

Ces mutations sont inséparables de la méthode d'exposition que j'ai préférée, et qui consiste à suivre autant que possible la marche de l'invention, à supposer que l'on cherche et trouve successivement toutes les parties qui doivent compléter la théorie qu'on développe. Si, dans un temps d'arrêt, on résume par certains mots les propriétés déjà rencontrées, ces mots cessent d'être exacts après de nouvelles excursions. C'est ce qui arrive, sur une plus grande échelle, pour toutes les sciences progressives, sans excepter les mathématiques : les dénominations les plus vraies à une époque, sont gênantes et fausses à une autre ; malheureusement, on ne peut pas toujours s'en débarrasser aussi facilement.

TABLE DES MATIÈRES.

La ligne qui suit le titre spécial de chaque paragraphe, développe ou complète ce titre. Quand elle est précédée d'un astérisque *, elle indique un sujet différent, traité accessoirement dans le paragraphe.

DEUXIÈME LEÇON.

Surfaces homofocales et isothermes du second ordre. — Cas des surfaces de révolution.

TROISIÈME LEÇON.

Méthode d'étude des fonctions inverses. — Procédé de transformation. — Introduction des imaginaires.

QUATRIÈME LEÇON.

Surfaces isothermes du second ordre, cas général. — Hyperboloïdes à deux nappes. — Formules d'Euler.

CINQUIÈME LEÇON.

Transformations réelles entre les (A_i, B_i, C_i) et les (A'_i, B'_i, C'_i). — Généralité de la période réelle.

SIXIÈME LEÇON.

Transformations imaginaires. — Double périodicité. — Multiplication des transcendantes. — Découverte d'Abel.

SEPTIÈME LEÇON.

Caractère général des (A_i, B_i, C_i). — Compléments naturels. — Formule unique comprenant toutes les formules d'Euler.

HUITIÈME LEÇON.

Système triple de surfaces isothermes et orthogonales. — Coordonnées nouvelles. — Variétés des surfaces conjuguées.

NEUVIÈME LEÇON.

Déformations des (A_i, B_i, C_i) aux limites de k. — Systèmes des ellipsoïdes planétaires et ovaires. — Système sphérique général.

DIXIÈME LEÇON.

Problème de la transformation des transcendantes. — Solution générale découverte par Jacobi.

ONZIÈME LEÇON.

Double solution de la transformation des transcendantes. — Nouvelle solution de leur multiplication.

DOUZIÈME LEÇON.

Extension des deux transformations à tous les (A_i, B_i, C_i). — Échelles descendante et ascendante.

APPENDICE A LA DOUZIÈME LEÇON.

TREIZIÈME LEÇON.

Applications. — Équation générale de l'équilibre des températures dans les ellipsoïdes.

QUATORZIÈME LEÇON.

Cas divers du prisme rectangle. — Développements d'une fonction en coordonnées rectilignes.

QUINZIÈME LEÇON.

Cas de la sphère. — Conditions restrictives. — Développement d'une fonction en coordonnées sphériques.

SEIZIÈME LEÇON.

Cas de l'ellipsoïde planétaire. — Coïncidence de deux facteurs du terme simple avec la fonction $P(\mu)$.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

Cas de l'ellipsoïde ovaire. — Nouvelle coïncidence avec la fonction P (μ). — Rapprochements.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

Cas des ellipsoïdes à trois axes inégaux. — Identité de forme des trois facteurs du terme simple.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

Suite du cas de l'ellipsoïde à trois axes. — Développement d'une fonction en série des (A_i, B_i, C_i).

VINGTIÈME LEÇON.

Propriétés de la solution trouvée. — Surfaces isothermes algébriques. — Classes des développements en série.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS INVERSES DES TRANSCENDANTES

ET

LES SURFACES ISOTHERMES.

PREMIÈRE LEÇON.

Définition des surfaces isothermes. — Condition de l'isothermie. — Paramètre thermométrique. — Exemples. — Cylindres paraboliques. — Sphères concentriques. — Cylindres à base circulaire. — Paraboloïdes de révolution. — Cylindres elliptiques et hyperboliques.

§ I.

DÉFINITION DES SURFACES ISOTHERMES.

Lorsqu'un corps solide est soumis à des sources constantes de chaleur et de froid, sa température, stationnaire en chaque point, peut différer d'un point à un autre. Cette température, que nous désignerons par V, est donc, en général, une fonction des coordonnées rectilignes et orthogonales x, y, z. On démontre, en physique mathématique, que la fonction V doit vérifier l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

pour que le corps solide, supposé homogène, soit en équilibre de température. Cette fonction doit, en outre, reproduire les températures fixes des différents points de la surface qui limite le corps.

Pour simplifier, nous représenterons la somme des opérations différentielles

$$\left(\frac{d^2.}{dx^2} + \frac{d^2.}{dy^2} + \frac{d^2.}{dz^2}\right)$$

que l'on fait subir à une fonction de (x, y, z), par le symbole Δ_2, et nous écrirons ainsi l'équation (1) :

$$\Delta_2 V = 0.$$

Quand la fonction $V = f(x, y, z)$ est connue, si l'on pose

$$(2) \qquad f(x, y, z) = \varepsilon,$$

ε étant une constante, cette équation représente une surface, lieu géométrique des points du solide qui ont tous la même température ε, et qu'on peut appeler une *surface isotherme*. Si, dans l'équation (2), on attribue successivement à la constante ε toutes les valeurs possibles, on aura une *famille de surfaces isothermes*. La constante ε qui particularise chacune de ces surfaces et qui change d'une surface individuelle à une autre, est un *paramètre* de cette famille. Si l'équation (2) a été déduite de la fonction connue V, c'est-à-dire si ε, considéré comme fonction de (x, y, z), vérifie l'équation $\Delta_2 \varepsilon = 0$, alors ε est le *paramètre thermométrique* de la famille de surfaces isothermes. Cette dénomination peut être étendue au produit de ε par un facteur constant quelconque.

§ II.

PROBLÈME DE L'ÉQUILIBRE DES TEMPÉRATURES.

Problème. — Les deux parois d'une enveloppe solide appartiennent à une même famille de surfaces isothermes dont on connaît le paramètre thermométrique $\varepsilon = f(x, y, z)$; la paroi intérieure qui correspond à $\varepsilon = \varepsilon_i$, est entretenue à une température fixe prise pour unité ; la paroi extérieure, au paramètre $\varepsilon = \varepsilon_e$, est entretenue à la température fixe *zéro*. On demande quelle fonction V exprime la température d'un point quelconque de l'enveloppe.

Solution. — Puisque $\varepsilon = f(x, y, z)$ est un paramètre thermométrique, on a identiquement $\Delta_2 \varepsilon = 0$, et, posant $V = A\varepsilon + B$ où A et B sont des constantes, il s'ensuit nécessairement $\Delta_2 V = 0$. L'état calorifique des parois s'exprimant par les deux équations

$$A\varepsilon_i + B = 1, \qquad A\varepsilon_e + B = 0,$$

on en tire

$$A = \frac{1}{\varepsilon_i - \varepsilon_e}, \qquad B = \frac{-\varepsilon_e}{\varepsilon_i - \varepsilon_e},$$

ce qui donne définitivement

$$V = \frac{\varepsilon - \varepsilon_e}{\varepsilon_i - \varepsilon_e} \tag{3}$$

pour la fonction cherchée.

§ III.

RECHERCHE DES SURFACES ISOTHERMES.

La solution précédente, si simple et si générale, d'un des problèmes principaux de la théorie analytique de la chaleur, donne une importance réelle à la recherche des familles de surfaces isothermes et de leurs paramètres thermométriques.

Il existe un très-grand nombre de familles de surfaces pour lesquelles cette recherche n'offre aucune difficulté :

telles sont les suivantes :

$x^2 + y^2 - 2z^2 = a^2 \varepsilon$ Hyperboloïdes de révolution à une nappe,

$\frac{yz}{a^2} + \frac{zx}{b^2} + \frac{xy}{c^2} = \varepsilon$ Surfaces gauches du second degré,

$x^2 - y^2 = a^2 \varepsilon$. . . . Cylindres hyperboliques équilatères,

$xy = a^2 \varepsilon$. . . . . Cylindres hyperboliques asymptotes, etc.,

qui donnent identiquement $\Delta_2 \varepsilon = 0$, et qui sont conséquemment isothermes, ε étant précisément leur paramètre thermométrique.

Mais le plus souvent, lorsqu'on se donne une famille de surfaces $F(x, y, z, \lambda) = 0$, elle n'est pas nécessairement composée de surfaces isothermes : il faut pour cela que le paramètre λ, considéré comme fonction des coordonnées, vérifie une certaine équation aux différences partielles qu'il faut chercher ; et si cette vérification a lieu, c'est-à-dire si la famille est composée de surfaces isothermes, son paramètre thermométrique ε est une certaine fonction du *paramètre géométrique* λ, fonction qu'il importe de connaître.

§ IV.

CONDITION DE L'ISOTHERMIE.

Si l'équation $F(x, y, z, \lambda) = 0$ représente une famille de surfaces isothermes, deux quelconques de ces surfaces peuvent servir de parois à une enveloppe solide ; et si ces deux parois sont en contact avec des sources constantes de chaleur, la température V et le paramètre géométrique λ conserveront ensemble des valeurs constantes sur chaque surface individuelle, et varieront ensemble d'une surface à une autre ; ces deux quantités seront donc dans une dépendance mutuelle. Ainsi V sera une fonction de λ et ne variera qu'avec ce paramètre.

D'après cela, u étant une quelconque des coordonnées

$(x, y, z,)$, on aura

$$\frac{dV}{du} = \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{du}, \quad \frac{d^2V}{du^2} = \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{du^2} + \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2;$$

et l'équation (1), qui doit être vérifiée, prendra la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dV}{d\lambda}\left(\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}\right) \\ + \dfrac{d^2V}{d\lambda^2}\left[\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 0, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2} = -\frac{\left(\dfrac{d^2V}{d\lambda^2}\right)}{\left(\dfrac{dV}{d\lambda}\right)};$$

or ici le second membre ne peut contenir d'autre variable que λ, il doit donc en être de même du premier. Ainsi le paramètre géométrique λ doit être tel, que le rapport

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]$$

soit une fonction de λ seul; c'est-à-dire que ce rapport doit conserver la même valeur sur chaque surface de la famille proposée. Telle est la condition essentielle pour que cette famille soit composée de surfaces isothermes.

§ V.

DÉTERMINATION DU PARAMÈTRE THERMOMÉTRIQUE.

La condition précédente étant remplie, le rapport trouvé peut toujours se mettre sous la forme $\frac{\varphi'}{\varphi}$, φ étant une fonction de λ, et φ' sa dérivée première. Par cette valeur, l'équation (4) devient

$$\frac{dV}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda}+\frac{d^2V}{d\lambda^2}\varphi=0,\quad \text{ou}\quad \frac{d\varphi\dfrac{dV}{d\lambda}}{d\lambda}=0,$$

et deux intégrations successives donnent

$$\varphi\frac{dV}{d\lambda}=A,\quad V=A\int\frac{d\lambda}{\varphi}+B;$$

A et B étant deux constantes. Cette valeur définitive de V montre que $\int\frac{d\lambda}{\varphi}=\varepsilon$ est le paramètre thermométrique de la famille des surfaces proposées, et reconnues isothermes.

Appliquons cette théorie et cette méthode à divers exemples. Pour simplifier l'écriture des calculs, u étant toujours une des coordonnées, je désignerai par S (d'un terme en u) la somme de trois expressions semblables, la première en x, la seconde en y, la troisième en z. Avec cette notation, $\Delta_2 F$ et $S\left(\frac{d^2F}{du^2}\right)$ expriment la même chose; la condition de l'isothermie s'énonce en posant

$$\frac{S\dfrac{d^2\lambda}{du^2}}{S\left(\dfrac{d\lambda}{du}\right)^2}=\frac{\varphi'}{\varphi},\ \text{etc.}$$

§ VI.

CYLINDRES PARABOLIQUES.

Exemple I. — L'équation $y^2=2\lambda x+\lambda^2$, représente une famille de cylindres paraboliques homofocaux, l'axe des z étant la ligne focale. Par première différentiation, on a

$$(x+\lambda)\frac{d\lambda}{dx}+\lambda=0,$$

$$(x+\lambda)\frac{d\lambda}{dy}-y=0,\quad \frac{d\lambda}{dz}=0,$$

d'où l'on conclut successivement

$$(x+\lambda)\,\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 = 2\lambda,$$

$$\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 + 2\frac{d\lambda}{dx} = 0.$$

Par seconde différentiation, il vient

$$(x+\lambda)\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + 2\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$(x+\lambda)\frac{d^2\lambda}{dy^2} + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 - 1 = 0, \quad \frac{d^2\lambda}{dz^2} = 0,$$

ce qui donne définitivement

$$(x+\lambda)\,\mathrm{S}\frac{d^2\lambda}{du^2} = 1,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{S}\dfrac{d^2\lambda}{du^2}}{\mathrm{S}\left(\dfrac{d\lambda}{du}\right)^2} = \frac{1}{2\lambda}.$$

La condition de l'isothermie est donc satisfaite. Posant $\dfrac{\varphi'}{\varphi} = \dfrac{1}{2\lambda}$, ou $\dfrac{d\dfrac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}}{d\lambda} = 0$, ou $\dfrac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}$ égal à une constante, qu'on peut mettre sous la forme $2\sqrt{a}$, il vient

$$\varphi = 2\sqrt{a\lambda}, \quad \varepsilon = \int\frac{d\lambda}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\lambda}{a}},$$

et, inversement, $\lambda = a\varepsilon^2$; de telle sorte que l'équation de la famille, exprimée à l'aide de son paramètre thermométrique, sera

$$y^2 = a\varepsilon^2(a\varepsilon^2 + 2x).$$

§ VII.

SPHÈRES CONCENTRIQUES.

Exemple II. — L'équation d'une famille de sphères concentriques est

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2,$$

on en déduit le tableau suivant :

$$\lambda \frac{d\lambda}{du} = u, \quad \lambda \frac{d^2\lambda}{du^2} + \left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 = 1,$$

$$S\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 = 1, \qquad \lambda S \frac{d^2\lambda}{du^2} = 2,$$

$$\frac{S\left(\frac{d^2\lambda}{du^2}\right)}{S\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2} = \frac{2}{\lambda},$$

et les sphères sont isothermes. Posant $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{2}{\lambda}$, ou $\frac{d\frac{\varphi}{\lambda^2}}{d\lambda} = 0$, ou $\frac{\varphi}{\lambda^2}$ égal à une constante, qu'on peut mettre sous la forme $-\frac{1}{a}$, il s'ensuit

$$\varphi = -\frac{\lambda^2}{a}, \quad \varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi} = a \int \left(-\frac{d\lambda}{\lambda^2}\right) = \frac{a}{\lambda},$$

et, inversement, $\lambda = \frac{a}{\varepsilon}$. Ainsi le paramètre thermométrique est en raison inverse du rayon, et l'équation de cette famille est

$$x^2 + y^2 + z^3 = \frac{a^2}{\varepsilon^2}.$$

§ VIII.

CYLINDRES A BASE CIRCULAIRE.

Exemple III. — L'équation $x^2+y^2=\lambda^2$ représente une famille de cylindres concentriques à base circulaire. On en déduit, en suivant la même marche que dans l'exemple précédent, et observant que $\frac{d\lambda}{dz}$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}$ sont ici nuls,

$$\lambda\frac{d\lambda}{dx}=x,\quad \lambda\frac{d\lambda}{dy}=y,\quad \frac{d\lambda}{dz}=0.$$

$$\lambda\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2=1,\quad \lambda\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2=1,\quad \frac{d^2\lambda}{dz^2}=0,$$

$$\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2=1,\quad \lambda\mathrm{S}\frac{d^2\lambda}{du^2}=1,$$

$$\frac{\mathrm{S}\dfrac{d^2\lambda}{du^2}}{\mathrm{S}\left(\dfrac{d\lambda}{du}\right)^2}=\frac{1}{\lambda};$$

et les cylindres sont isothermes. Posant $\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{1}{\lambda}$, ou $\varphi=\lambda$, il vient

$$\epsilon=\int\frac{d\lambda}{\lambda}\quad\text{et}\quad \lambda=ae^{\epsilon}.$$

Les cylindres circulaires isothermes ont donc pour équation

$$x^2+y^2=a^2e^{2\epsilon}.$$

§ IX.

PARABOLOIDES DE RÉVOLUTION.

Exemple IV. — L'équation $y^2+z^2=2\lambda x+\lambda^2$ représente une famille de paraboloïdes de révolution homofocaux. On déduit de cette équation (en suivant la même marche que dans l'exemple I, et observant que $\frac{d\lambda}{dz}$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}$, ne sont plus nuls), d'abord, par première différentiation,

$$(x+\lambda)\frac{d\lambda}{dx}+\lambda=0,$$

$$(x+\lambda)\frac{d\lambda}{dy}-y=0,$$

$$(x+\lambda)\frac{d\lambda}{dz}-z=0,$$

d'où l'on conclut successivement

$$(x+\lambda)\,\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2=2\lambda,$$

$$\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+2\frac{d\lambda}{dx}=0;$$

puis, par seconde différentiation,

$$(x+\lambda)\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+2\frac{d\lambda}{dx}=0,$$

$$(x+\lambda)\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2-1=0,$$

$$(x+\lambda)\frac{d^2\lambda}{dz^2}+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2-1=0;$$

ce qui donne définitivement

$$(x+\lambda)\,\mathrm{S}\frac{d^2\lambda}{du^2}=2,$$

$$\frac{\mathrm{S}\frac{d^2\lambda}{du^2}}{\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}=\frac{1}{\lambda}:$$

et les paraboloïdes sont isothermes. Posant alors $\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{1}{\lambda}$, ou $\varphi = \lambda$, il vient, comme dans l'exemple précédent, $\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\lambda}$, et $\lambda = ae^{\varepsilon}$; en sorte que la famille des paraboloïdes de révolution, homofocaux et isothermes, a pour équation

$$y^2 + z^2 = ae^{\varepsilon}(ae^{\varepsilon} + 2x).$$

Scolie. — Dans le groupe des sphères concentriques, et des cylindres à base circulaire, le rayon des sphères s'exprime algébriquement en ε, celui des cylindres par une fonction transcendante. Au contraire, dans le groupe des paraboloïdes de révolution et des cylindres paraboliques, le paramètre géométrique des cylindres est algébrique en ε, tandis que celui des paraboloïdes s'exprime par une fonction transcendante, qui est d'ailleurs la même que celle du premier groupe. Cette remarque n'est-elle que curieuse? Ne servirait-elle pas à caractériser l'analogie et la différence qui existent entre les deux courbes les plus simples, et en même temps les plus naturelles, le cercle et la parabole?

§ X.

CYLINDRES ELLIPTIQUES ET HYPERBOLIQUES.

Exemple V. — L'équation $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$ représente une famille de cylindres homofocaux du second degré, elliptiques si λ surpasse la constante c, hyperboliques si λ est moindre que c. Désignant, pour simplifier,

$$\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - c^2)^2} \text{ par H,}$$

$$\frac{x^2}{\lambda^6} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - c^2)^3} \text{ par G,}$$

on a, par première différentiation,

$$\lambda H \frac{d\lambda}{dx} = \frac{x}{\lambda^2}, \quad \lambda H \frac{d\lambda}{dy} = \frac{y}{\lambda^2 - c^2}, \quad \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

d'où l'on conclut successivement

$$\lambda \left(\frac{x}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{dx} + \frac{y}{(\lambda^2 - c^2)^2} \frac{d\lambda}{dy} \right) = \frac{G}{H},$$

$$\lambda^2 HS \left(\frac{d\lambda}{du} \right)^2 = 1 ;$$

il vient, par seconde différentiation,

$$\lambda H \frac{d^2\lambda}{dx^2} + H \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)^2 - 4\lambda^2 G \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)^2 + 4\lambda \frac{x}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\lambda H \frac{d^2\lambda}{dy^2} + H \left(\frac{d\lambda}{dy} \right)^2 - 4\lambda^2 G \left(\frac{d\lambda}{dy} \right)^2 + 4\lambda \frac{y}{(\lambda^2 - c^2)^2} \frac{d\lambda}{dy} = \frac{1}{\lambda^2 - c^2};$$

ce qui donne, après sommation et réduction,

$$\lambda HS \frac{d^2\lambda}{du^2} = \frac{1}{\lambda^2 - c^2},$$

$$\frac{S \dfrac{d^2\lambda}{du^2}}{S \left(\dfrac{d\lambda}{du} \right)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2};$$

et les surfaces sont isothermes. Posant $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}$, il est nécessaire de séparer les deux cas de $\lambda > c$, et de $\lambda < c$.

Si λ surpasse c, on aura

$$\varphi = \sqrt{\lambda^2 - c^2}, \quad \varepsilon = \int_c^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}},$$

$$\lambda = c\, \frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2}, \quad \sqrt{\lambda^2 - c^2} = c\, \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2},$$

et l'équation des cylindres elliptiques, homofocaux et isothermes, est

$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2} = c^2.$$

Si λ est inférieur à c, on pourra prendre

$$\varphi = -\sqrt{c^2 - \lambda^2}, \quad \varepsilon = \int_\lambda^c \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2 - \lambda^2}},$$

$$\lambda = c \cos \varepsilon, \quad \sqrt{c^2 - \lambda^2} = c \sin \varepsilon;$$

et l'équation des cylindres hyperboliques, homofocaux et isothermes, sera

$$\frac{x^2}{\cos^2 \varepsilon} - \frac{y^2}{\sin^2 \varepsilon} = c^2.$$

Dans le premier cas, celui des cylindres elliptiques, il convient d'introduire une notation commode qui consiste à représenter

$$\frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} \text{ par } \mathrm{E}(\varepsilon), \quad \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} \text{ par } \mathcal{E}(\varepsilon),$$

$\mathrm{E}(\varepsilon)$ est ce qu'on appelle le *cosinus hyperbolique* de ε; $\mathcal{E}(\varepsilon)$ est le *sinus hyperbolique* de la même variable; ces deux fonctions sont liées l'une à l'autre par l'équation

$$\mathrm{E}^2(\varepsilon) - \mathcal{E}^2(\varepsilon) = 1.$$

Avec cette notation, on écrit ainsi

$$\frac{x^2}{\mathrm{E}^2(\varepsilon)} + \frac{y^2}{\mathcal{E}^2(\varepsilon)} = c^2,$$

l'équation des cylindres elliptiques isothermes.

§ XI.

MULTIPLICITÉ DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES.

Il importe de remarquer que, pour chacune des deux familles de surfaces appartenant à l'exemple actuel, il y a réellement deux paramètres géométriques entre lesquels il existe une relation, car les deux axes de la base, dans chaque cylindre, sont également importants, et il n'y a aucune raison de préférer l'un d'eux. D'ailleurs le paramètre thermométrique ε s'exprime indifféremment par l'un ou par l'autre. En effet, au premier cas, posant $\sqrt{\lambda^2 - c^2} = \lambda'$, on aura

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = c^2, \quad \lambda d\lambda = \lambda' d\lambda' \quad \text{ou} \quad \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} = \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + c^2}},$$

ce qui donne simultanément

$$\varepsilon = \int_c^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} = \int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + c^2}},$$

$$\lambda = c\,\mathrm{E}(\varepsilon), \quad \lambda' = c\,\mathcal{E}(\varepsilon).$$

Au second cas, posant $\sqrt{c^2 - \lambda^2} = \lambda'$, on aura

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = c^2, \quad \lambda d\lambda + \lambda' d\lambda' = 0, \quad \text{ou} \quad - \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2 - \lambda^2}} = \frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2 - \lambda'^2}},$$

ce qui donne à la fois

$$\varepsilon = \int_\lambda^c \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2 - \lambda^2}} = \int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2 - \lambda'^2}},$$

$$\lambda = c \cos \varepsilon, \quad \lambda' = c \sin \varepsilon.$$

Cette multiplicité des paramètres géométriques se présentera constamment dans les nouveaux exemples que nous traiterons.

§ XII.

DÉFINITION DES FONCTIONS INVERSES.

Dans toute recherche du paramètre thermométrique, il importe, comme nous l'avons fait aux exemples précédents, de disposer la constante amenée par l'intégration de φ, de telle sorte que $\int \frac{d\lambda}{\varphi} = \varepsilon$ soit un nombre, un simple rapport, dont le degré géométrique soit zéro, afin que ce nombre puisse servir à exprimer une température. En outre, il convient d'égaler le paramètre géométrique, ou la ligne λ, à une autre ligne constante (a ou c), multipliée par une fonction de ε, $F(\varepsilon)$, qui ne soit elle-même qu'un rapport. De cette manière, l'homogénéité de l'équation, représentant la famille de surfaces qu'on étudie, ne sera pas troublée par l'introduction du paramètre thermométrique.

Le groupe d'équations $\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi}$, $\lambda = c\,F(\varepsilon)$, est, en réalité, le but final des recherches actuelles. Lorsque l'intégrale ε est transcendante, $F(\varepsilon)$ est ce qu'on appelle *la fonction inverse de la transcendante* ε. Cette dénomination doit être généralisée. Si la famille de surfaces que l'on traite présente plusieurs paramètres géométriques conjugués, λ, λ', λ'',..., tous nécessaires pour la complète définition de chaque surface, il importe d'exprimer séparément chacun d'eux à l'aide du paramètre thermométrique; on a alors

$$\lambda = c\,F(\varepsilon),\quad \lambda' = c\,\mathfrak{F}(\varepsilon),\quad \lambda'' = c\,f(\varepsilon),\ldots,$$

et $F(\varepsilon)$, $\mathfrak{F}(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$, ..., sont autant de fonctions inverses de la transcendante ε.

Les relations qui existent entre ces fonctions inverses conjuguées, et qui facilitent singulièrement l'étude de leurs propriétés, permettraient de les exprimer toutes à l'aide d'une seule; mais le plus souvent cette élimination fait disparaître toute symétrie, et complique les calculs en introduisant, par exemple, de nombreux radicaux dont les signes sont ambigus. D'ailleurs, dans toute étude spéciale, quand la géométrie attribue une égale importance à plusieurs lignes, si, par un choix nécessairement arbitraire, on remplace leur ensemble par une seule d'entre elles, on perd toujours en clarté, en précision, en richesse de déductions, plus qu'on ne peut gagner à cette simplification qui n'est réellement qu'apparente.

Terminons cette première leçon par un rapprochement trop important pour être omis. Dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes, on appelle *potentiel* la fonction $V = \sum \frac{m}{r}$, m étant la masse d'une particule pondérable, r la distance qui la sépare du point matériel qu'elle attire, et la somme $\sum$ s'étendant à toutes les particules qui peuvent agir sur le même point. Lorsque cette fonction V est connue, les composantes (X, Y, Z), dirigées suivant les axes coordonnés, de la résultante des attractions exercées sur le point matériel de masse μ, sont respectivement égales à $\left(\mu \frac{dV}{dx}, \mu \frac{dV}{dy}, \mu \frac{dV}{dz}\right)$. Or on vérifie aisément que le potentiel V satisfait toujours à l'équation (1), ou que l'on a $\Delta_2 V = 0$. De là résulte que les surfaces sur lesquelles la nouvelle fonction V conserve une même valeur numérique, et que l'on appelle *surfaces de niveau*, sont identiques avec les surfaces isothermes; le potentiel n'étant autre que le paramètre thermométrique multiplié par un facteur constant. Ainsi ce que nous dirons sur les surfaces isothermes et les paramètres thermométriques sera applicable aux surfaces de niveau et aux potentiels; il n'y aura que les dénominations à changer. Mais, tout en indiquant cette généralisation, restreignons-nous désormais aux surfaces isothermes.

DEUXIÈME LEÇON.

Exemple des surfaces homofocales du second ordre. — Cas des surfaces de révolution. — Ellipsoïdes planétaires. — Hyperboloïdes de révolution à une et à deux nappes. — Ellipsoïdes ovaires. — Fonctions inverses introduites. — Transcendantes rencontrées.

---

§ XIII.

SURFACES HOMOFOCALES DU SECOND ORDRE.

Exemple VI. — Toutes les familles de surfaces du second ordre, concentriques et homofocales, sont représentées par l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1;$$

la constante c surpasse b, et le rapport de ces deux lignes est quelconque. La lettre u désignant toujours une des coordonnées (x, y, z), on peut écrire l'équation précédente de cette manière :

$$\mathrm{S}\frac{u^2}{\lambda^2-k^2}=1,$$

k étant zéro pour x, b pour y, c pour z; et posant, pour simplifier,

$$\mathrm{S}\frac{u^2}{(\lambda^2-k^2)^2}=\mathrm{H},\quad \mathrm{S}\frac{u^2}{(\lambda^2-k^2)^3}=\mathrm{G},$$

on a successivement $\left(\text{en suivant la même marche que dans l'exemple V, et observant que } \frac{d\lambda}{dz}, \frac{d^2\lambda}{dz^2}, \text{ ne sont plus nuls}\right)$

par première différentiation,

$$\lambda \mathrm{H} \frac{d\lambda}{du} = \frac{u}{\lambda^2 - k^2},$$

d'où l'on conclut les deux relations

$$\lambda^2 \mathrm{HS} \left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 = 1, \quad \lambda \mathrm{S} \frac{u}{(\lambda^2 - k^2)^2} \frac{d\lambda}{du} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}};$$

par seconde différentiation,

$$\lambda \mathrm{H} \frac{d^2\lambda}{du^2} + \mathrm{H} \left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 - 4\lambda^2 \mathrm{G} \left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2$$
$$+ 4\lambda \frac{u}{(\lambda^2 - k^2)^2} \frac{d\lambda}{du} = \frac{1}{\lambda^2 - k^2},$$

ce qui donne, après sommation et réduction, la valeur

$$\lambda \mathrm{HS} \frac{d^2\lambda}{du^2} = \frac{1}{\lambda^2 - b^2} + \frac{1}{\lambda^2 - c^2},$$

et enfin, le rapport

$$\frac{\mathrm{S} \dfrac{d^2\lambda}{du^2}}{\mathrm{S} \left(\dfrac{d\lambda}{du}\right)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - b^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}.$$

Toutes les surfaces comprises dans l'équation (1) sont donc isothermes, et l'on a

$$(2) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - b^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2},$$

équation qui conduit à des valeurs différentes de φ, suivant que le paramètre géométrique λ est compris entre o et b, ou entre b et c, ou entre c et l'infini.

§ XIV.

CAS DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

Nous ne considérerons, dans cette leçon, que les deux rapports particuliers o et 1, des constantes b et c; c'est-à-dire le cas où $b = o$, et celui où $b = c$.

Lorsque $b = o$, l'équation (1) devient

$$(3) \qquad \frac{x^2+y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Si λ surpasse c, on a une famille d'ellipsoïdes de révolution, dans lesquels l'axe polaire est moindre que le diamètre de l'équateur, et que nous appellerons *ellipsoïdes planétaires*. Si λ est inférieur à c, la même équation (3) représente une famille d'hyperboloïdes de révolution à une nappe. D'après (2), pour ces deux familles, on a

$$(4) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}.$$

Lorsque $b = c$, l'équation (1) devient

$$(5) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2+z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Si λ est inférieur à c, on a une famille d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes. Si λ surpasse c, la même équation (5) représente une famille d'ellipsoïdes de révolution, dans lesquels l'axe polaire est plus grand que le diamètre de l'équateur, et que nous appellerons *ellipsoïdes ovaires*. D'après (2), pour ces deux familles, on a

$$(6) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - c^2}.$$

Il s'agit de déterminer le paramètre thermométrique ε, et les fonctions inverses, pour chacune des quatre familles de surfaces de révolution du second ordre, que nous venons de définir.

§ XV.

ELLIPSOIDES PLANÉTAIRES.

Pour la famille d'ellipsoïdes planétaires, λ surpasse c dans les équations (3) et (4). Il convient de poser $\sqrt{\lambda^2 - c^2} = \lambda'$; λ' est la demi-distance des pôles : c'est un paramètre géométrique conjugué à λ, et au moins aussi important que celui-ci. On a

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = c^2, \quad \lambda\, d\lambda = \lambda'\, d\lambda',$$

ou

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} = \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + c^2}}. \tag{7}$$

L'équation (4) est satisfaite par la valeur

$$\varphi = \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c}$$

qui donne, pour le paramètre thermométrique,

$$\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi} = c\int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda^2 - c^2}};$$

et, d'après la relation (7), on aura encore

$$\varepsilon = c\int \frac{d\lambda'}{\lambda'^2 + c^2},$$

puisque $\lambda = \sqrt{\lambda'^2 + c^2}$. Ainsi le paramètre thermométrique ε s'exprime, à l'aide de l'un ou de l'autre des deux paramètres géométriques conjugués λ et λ', de la manière suivante :

$$\varepsilon = c\int_c^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda^2 - c^2}} = c\int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{\lambda'^2 + c^2}. \tag{8}$$

Ces deux intégrales transcendantes sont vérifiées par les valeurs

$$\lambda = \frac{c}{\cos \varepsilon}, \quad \lambda' = c \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon},$$

ce qui donne $\frac{1}{\cos \varepsilon}$ et $\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}$, pour les fonctions inverses correspondantes aux deux paramètres géométriques λ et λ'. Il convient d'exprimer ces fonctions inverses par elles-mêmes, et non à l'aide d'autres fonctions; on sait que l'une est la *sécante* et l'autre la *tangente* de la variable ε; on écrira donc

$$(9) \qquad \lambda = c.\text{séc}\,\varepsilon, \quad \lambda' = c.\text{tang}\,\varepsilon,$$

et les ellipsoïdes planétaires isothermes auront pour équation

$$(10) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\text{séc}^2 \varepsilon} + \frac{z^2}{\text{tang}^2 \varepsilon} = c^2.$$

Autrement : L'équation (4) admet aussi la valeur

$$\varphi = -\frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c},$$

qui conduit à la double expression

$$(8\ bis) \qquad \varepsilon = c \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - c^2}} = c \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{d\lambda'}{\lambda'^2 + c^2}.$$

Ces deux intégrales transcendantes sont vérifiées par les valeurs

$$\lambda = \frac{c}{\sin \varepsilon}, \quad \lambda' = c \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon};$$

les deux fonctions inverses sont l'une la *cosécante*, l'autre la *cotangente*, de la variable ε; on écrira donc

$$(9\ bis) \qquad \lambda = c.\text{coséc}\,\varepsilon, \quad \lambda' = c.\cot \varepsilon;$$

et les ellipsoïdes planétaires isothermes seront aussi représentés par l'équation

$$(10\ bis)\qquad \frac{x^2+y^2}{\operatorname{coséc}^2\varepsilon}+\frac{z^2}{\cot^2\varepsilon}=e^2.$$

On remarquera que les équations (10) et (10 *bis*) ont conservé la même forme que l'équation primitive (3), forme essentielle et caractéristique des surfaces du second ordre. Cet avantage disparaît, si l'on exprime, et substitue, λ et λ' en $\cos\varepsilon$ et $\sin\varepsilon$. D'après cela, la nécessité d'introduire les fonctions *séc* ε, *tang* ε, *coséc* ε, *cot* ε est aussi bien établie, et par les mêmes raisons, que celles d'exprimer, par des fonctions spéciales $E(\varepsilon)$, $\mathcal{E}(\varepsilon)$, $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, les paramètres géométriques des cylindres elliptiques et hyperboliques dans l'exemple V.

§ XVI.

HYPERBOLOIDES DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE.

Pour la famille d'hyperboloïdes de révolution à une nappe, λ est inférieur à c dans les équations (3) et (4). Posant $\sqrt{c^2-\lambda^2}=\lambda'$, on a

$$\lambda^2+\lambda'^2=c^2,\quad \lambda\,d\lambda+\lambda'\,d\lambda'=0,$$

ou

$$(11)\qquad -\frac{d\lambda}{\sqrt{c^2-\lambda^2}}=\frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2-\lambda'^2}}.$$

L'équation (4) est satisfaite par la valeur

$$\varphi=-\frac{\lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}}{c},$$

qui donne, pour le paramètre thermométrique,

$$\varepsilon=\int\frac{d\lambda}{\varphi}=c\int_\lambda^c\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}},$$

et, d'après la relation (11), on aura encore

$$\varepsilon = c\int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{c^2 - \lambda'^2},$$

puisque $\lambda = \sqrt{c^2 - \lambda'^2}$. Ainsi, on a la double expression

$$(12) \qquad \varepsilon = c\int_{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}} = c\int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{c^2-\lambda'^2}.$$

Ces intégrales transcendantes sont vérifiées par les valeurs

$$\lambda = \frac{c}{\mathrm{E}(\varepsilon)}, \quad \lambda' = c\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{\mathrm{E}(\varepsilon)};$$

ce qui donne $\frac{1}{\mathrm{E}(\varepsilon)}$ et $\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{\mathrm{E}(\varepsilon)}$ pour les deux fonctions inverses, correspondantes aux deux paramètres géométriques λ et λ'. Pour exprimer ces fonctions par elles-mêmes, et non à l'aide d'autres fonctions, les cosinus et sinus hyperboliques $\mathrm{E}(\varepsilon)$, $\mathcal{E}(\varepsilon)$, pouvant être désignés par les symboles H cos ε, H sin ε, nous représenterons $\frac{1}{\mathrm{E}(\varepsilon)}$ par H séc ε, $\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{\mathrm{E}(\varepsilon)}$ par H tang ε; nous écrirons donc

$$(13) \qquad \lambda = c.\mathrm{H\,séc}\,\varepsilon, \quad \lambda' = c.\mathrm{H\,tang}\,\varepsilon;$$

et les hyperboloïdes de révolution à une nappe, homofocaux et isothermes, auront pour équation celle-ci:

$$(14) \qquad \frac{x^2+y^2}{\mathrm{H\,séc}^2\varepsilon} - \frac{z^2}{\mathrm{H\,tang}^2\varepsilon} = c^2,$$

qui est analogue, et en quelque sorte parallèle, à la première forme (10) de l'équation des ellipsoïdes planétaires

§ XVII.

HYPERBOLOIDES DE RÉVOLUTION A DEUX NAPPES.

Pour la famille d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes, λ est inférieur à c, dans les équations (5) et (6). Posant $\sqrt{c^2-\lambda^2}=\lambda'$, on arrive, comme au cas précédent, à la relation (11), qu'on peut écrire ainsi

$$\text{(11 bis)} \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2-\lambda^2}} = -\frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2-\lambda'^2}}.$$

L'équation (6) est satisfaite par la valeur

$$\varphi = \frac{c^2-\lambda^2}{c},$$

qui donne, pour le paramètre thermométrique,

$$\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi} = c\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{c^2-\lambda^2},$$

et, d'après la relation (11 *bis*), on a encore

$$\varepsilon = c\int_{\lambda'}^{c} \frac{d\lambda'}{\lambda'\sqrt{c^2-\lambda'^2}},$$

puisque $\sqrt{c^2-\lambda^2}=\lambda'$. Ainsi on a la double expression

$$\text{(12 bis)} \qquad \varepsilon = c\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{c^2-\lambda^2} = c\int_{\lambda'}^{c} \frac{d\lambda'}{\lambda'\sqrt{c^2+\lambda'^2}}.$$

Ces deux intégrales transcendantes, qui sont les mêmes qu'au cas précédent, sont vérifiées par les valeurs

$$\text{(13 bis)} \qquad \lambda = c.\mathrm{H}\tang\varepsilon, \quad \lambda' = c.\mathrm{H}\sec\varepsilon\ ;$$

et les hyperboloïdes de révolution à deux nappes, homofocaux et isothermes, auront pour équation

$$\text{(15)}\qquad \frac{x^2}{\mathrm{H}\,\mathrm{tang}^2\varepsilon} - \frac{y^2+z^2}{\mathrm{H}\,\mathrm{séc}^2\varepsilon} = c^2.$$

On remarquera que les deux familles d'hyperboloïdes de révolution isothermes conduisent aux mêmes fonctions inverses. De là résulte qu'elles ont en quelque sorte la même équation, au signe près de la constante c^2. Pour l'une et l'autre famille, à l'axe de la courbe méridienne, qui sert d'axe de révolution, correspond la fonction inverse $\mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,\varepsilon$, à son conjugué la fonction $\mathrm{H}\,\mathrm{séc}\,\varepsilon$.

§ XVIII.

ELLIPSOIDES OVAIRES.

Enfin, pour la famille d'ellipsoïdes ovaires, λ surpasse c, dans les équations (5) et (6). Posant $\sqrt{\lambda^2-c^2}=\lambda'$, on arrive, comme pour les ellipsoïdes planétaires, à la relation (7). L'équation (6) est satisfaite par la valeur

$$\varphi = -\frac{\lambda^2-c^2}{c},$$

qui donne, pour le paramètre thermométrique,

$$\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi} = c\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2-c^2},$$

et, d'après la relation (7), on a encore

$$\varepsilon = c\int_{\lambda'}^\infty \frac{d\lambda'}{\lambda'\sqrt{\lambda'^2+c^2}},$$

puisque $\sqrt{\lambda^2-c^2}=\lambda'$. Ainsi, on a la double expression

$$\text{(16)}\qquad \varepsilon = c\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2-c^2} = c\int_{\lambda'} \frac{d\lambda'}{\lambda'\sqrt{\lambda'^2+c^2}}.$$

Ces intégrales transcendantes sont vérifiées par les valeurs

$$\lambda = c\,\frac{E(\varepsilon)}{\mathcal{E}(\varepsilon)},\quad \lambda' = \frac{c}{\mathcal{E}(\varepsilon)};$$

ce qui donne $\frac{E(\varepsilon)}{\mathcal{E}(\varepsilon)}$ et $\frac{1}{\mathcal{E}(\varepsilon)}$, pour les deux fonctions inverses correspondantes aux deux paramètres géométriques λ et λ'; nous désignerons ces nouvelles fonctions spéciales par H cotang ε et H coséc ε; nous écrirons donc

$$(17)\qquad \lambda = c.\text{H cotang}\,\varepsilon,\quad \lambda' = c.\text{H coséc}\,\varepsilon;$$

et les ellipsoïdes ovaires, homofocaux et isothermes, seront représentés par l'équation

$$(18)\qquad \frac{x^2}{\text{H cotang}^2\varepsilon} + \frac{y^2+z^2}{\text{H coséc}^2\varepsilon} = c^2,$$

qui est analogue, et en quelque sorte parallèle, à l'équation (10 *bis*) des ellipsoïdes planétaires.

Il est à remarquer qu'au point de vue de l'isothermie, ou par la nature des fonctions inverses qui leur correspondent, les ellipsoïdes ovaires diffèrent plus des ellipsoïdes planétaires que des deux familles d'hyperboloïdes de révolution, lesquelles se confondent en quelque sorte.

§ XIX.

FONCTIONS INVERSES INTRODUITES.

En résumé, la nécessité d'introduire des fonctions spéciales pour exprimer les paramètres géométriques, ou pour désigner les fonctions inverses, qui correspondent aux familles de cylindres isothermes ayant pour bases des ellipses et des hyperboles, et aux familles de surfaces de révolution isothermes dont ces courbes sont les sections méridiennes, nous a successivement conduits aux fonctions suivantes : 1° pour les cylindres elliptiques, aux fonctions E (ε) et ℰ (ε), ou H cos ε et H sin ε, lesquelles se présentant avant leurs homologues, doivent être appelées l'*hypocosinus* et l'*hyposinus* du paramètre thermométrique ε ; 2° pour les cylindres hyperboliques, aux fonctions sin ε et cos ε ; 3° pour les ellipsoïdes planétaires, aux fonctions séc ε et tang ε, ou à celles-ci, coséc ε et cotang ε ; 4° pour les hyperboloïdes de révolution, à une nappe et à deux nappes, aux fonctions H séc ε et H tang ε, c'est-à-dire à l'*hyposécante* et à l'*hypotangente* de ε ; 5° enfin, pour les ellipsoïdes ovaires, aux fonctions H coséc ε et H cotang ε, c'est-à-dire, à l'*hypocosécante* et à l'*hypocotangente* de ε.

Ce qui donne douze fonctions inverses : six sans H, lesquelles ne sont autres que les six fonctions trigonométriques, et six avec H, homologues des précédentes, parmi les fonctions dites exponentielles. Et l'on doit remarquer que ces deux classes ne correspondent pas séparément aux deux types : ellipse et hyperbole. Car, dans le groupe des cylindres, les fonctions inverses sont, exponentielles pour les cylindres elliptiques, trigonométriques pour les cylindres hyperboliques, tandis que dans le groupe des surfaces de révolution, les fonctions inverses sont, trigonométriques pour les ellipsoïdes planétaires, exponentielles pour les hyperboloïdes, ainsi que pour les ellipsoïdes ovaires, qui semblent commencer une troisième période, analogue au premier partage.

§ XX.

TRANSCENDANTES RENCONTRÉES.

Si nous considérons maintenant la suite naturelle des exemples que nous avons traités, au point de vue des diverses transcendantes, qui expriment le paramètre thermométrique ε, à l'aide du paramètre géométrique λ ou λ', nous rencontrons : d'abord, dans le groupe des cylindres à base circulaire et des paraboloïdes de révolution, la transcendante logarithmique; puis successivement, et sans aucune exception, toutes les transcendantes du calcul intégral ordinaire, c'est-à-dire toutes celles qui s'intègrent, soit par logarithmes, soit par arcs de cercle, les seules qui fassent partie de l'enseignement classique.

§ XXI.

NÉCESSITÉ DE NOUVELLES FONCTIONS.

Or les ellipsoïdes et les hyperboloïdes de révolution, qui correspondent aux valeurs extrêmes zéro et l'unité du rapport $\frac{b}{c}$, ne sont que des cas excessivement particuliers de l'exemple général que nous avons abordé au commencement de cette leçon. Il faut donc que les familles de surfaces, représentées par l'équation (1) quand le rapport $\frac{b}{c}$ n'est ni zéro, ni l'unité, et dont l'isothermie est constatée par la relation (2), conduisent à des transcendantes et à des fonctions inverses autres que les classiques, beaucoup plus générales, dont les précédentes ne seront que des cas particuliers, et qui réuniront à la fois toutes leurs propriétés. Introduire et étudier ces transcendantes et ces fonctions inverses nouvelles, tel sera le but des leçons qui vont suivre.

La théorie des surfaces isothermes assigne aux fonctions inverses l'importance principale; ce sont elles surtout qu'il s'agit de déterminer, et dont il faut définir les propriétés. Pour y parvenir, il existe une méthode à suivre, qu'il importe de connaître, et dont l'exposition fera l'objet spécial de la troisième leçon, laquelle comprendra, en outre, d'autres préparations préliminaires, propres à faciliter l'étude que nous avons en vue.

Les cinq familles de surfaces isothermes que nous venons d'étudier, ont chacune deux paramètres géométriques λ et λ'. Elles sont définies et caractérisées, d'une manière simple, par les tableaux suivants, dans lesquels u et u représentent les fonctions inverses, ou les rapports $\frac{\lambda}{c}$ et $\frac{\lambda'}{c}$.

I. — *Cylindres elliptiques.*

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u'^2} = c^2, \quad u^2 - u'^2 = 1,$$

$$\varepsilon = \int_1^u \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{u'^2+1}},$$

$$u = \frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2} = \mathrm{E}(\varepsilon) = \mathrm{H}\cos\varepsilon,$$

$$u' = \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} = \mathcal{E}(\varepsilon) = \mathrm{H}\sin\varepsilon.$$

II. — *Cylindres hyperboliques.*

$$\frac{x^2}{u^2} - \frac{y^2}{u'^2} = c^2, \quad u^2 + u'^2 = 1,$$

$$\varepsilon = \int_u^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{1-u'^2}},$$

$$u = \cos\varepsilon, \quad u' = \sin\varepsilon.$$

III. — *Ellipsoïdes planétaires.*

$$\frac{x^2+y^2}{u^2} + \frac{z^2}{u'^2} = c^2, \quad u^2 - u'^2 = 1,$$

$$\varepsilon = \int_1^u \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \int_0^{u'} \frac{du'}{u'^2+1},$$

$$u = \text{séc}\,\varepsilon, \quad u' = \text{tang}\,\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \int_u^\infty \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \int_{u'}^\infty \frac{du'}{u'^2+1},$$

$$u = \text{coséc}\,\varepsilon, \quad u' = \cot\varepsilon.$$

IV. — *Hyperboloïdes de révolution.*

$$\frac{x^2+y^2}{u^2}-\frac{z^2}{u'^2}=\pm c^2,\quad u^2+u'^2=1,$$

$$\varepsilon=\int_u^1\frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}=\int_0^{u'}\frac{du'}{1-u'^2},$$

$$u=\frac{1}{\mathrm{E}(\nu)}=\mathrm{H}\,\mathrm{séc}\,\varepsilon,\quad u'=\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{\mathrm{E}(\varepsilon)}=\mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,\varepsilon.$$

V. — *Ellipsoïdes ovaires.*

$$\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2+z^2}{u'^2}=e^2,\quad u^2-u'^2=1,$$

$$\varepsilon=\int_u^\infty\frac{du}{u^2-1}=\int_{u'}^\infty\frac{du'}{u'\sqrt{u'^2+1}},$$

$$u=\frac{\mathrm{E}(\varepsilon)}{\mathcal{E}(\varepsilon)}=\mathrm{H}\cot\varepsilon,\quad u'=\frac{1}{\mathcal{E}(\varepsilon)}=\mathrm{H}\,\mathrm{coséc}\,\varepsilon.$$

La seule inspection de ces tableaux conduit, sans peine, aux diverses conséquences énoncées dans les trois derniers paragraphes.

TROISIÈME LEÇON.

Méthode d'étude des fonctions inverses. — Application aux fonctions inverses des cylindres hyperboliques. — Périodicité. — Procédé de transformation. — Application aux fonctions inverses des ellipsoïdes planétaires. — Introduction des imaginaires.

---

§ XXII.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION INVERSE.

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre généralement, consiste à déduire de l'intégrale directe $\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi}$, qui est presque toujours une transcendante, les propriétés de la fonction inverse $\lambda(\varepsilon)$, et s'il est possible, cette fonction même. D'abord, on peut obtenir son développement en série, à l'aide du théorème de Maclaurin : car si λ_0 est le paramètre géométrique de la surface individuelle où ε est pris égal à zéro, φ', φ'', φ''',..., désignant les dérivées successives de la fonction φ de λ, la différentiation donnera

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \varphi, \quad \frac{d^2\lambda}{d\varepsilon^2} = \varphi'\varphi, \quad \frac{d^3\lambda}{d\varepsilon^3} = \varphi''\varphi^2 + \varphi'^2\varphi, \ldots,$$

et, si l'on indique par le symbole $(\ldots)_0$, ce que devient une fonction de λ pour $\lambda = \lambda_0$, on aura

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varphi_0 . \varepsilon + (\varphi'\varphi)_0 \frac{\varepsilon^2}{2} + (\varphi''\varphi^2 + \varphi'^2\varphi)_0 \frac{\varepsilon^3}{2.3} + \ldots.$$

Mais ce développement en série, qui peut servir à calculer approximativement les valeurs de la fonction $\lambda(\varepsilon)$, entre certaines limites de ε, n'indique rien sur les propriétés de cette fonction.

§ XXIII.

MÉTHODE D'ÉTUDE D'UNE FONCTION INVERSE.

Voici la méthode qui conduit le plus directement au but proposé. Soient α, β, γ, trois valeurs du paramètre thermométrique ε, et x, y, z, les valeurs correspondantes du paramètre géométrique λ, ou de la fonction inverse; on aura

$$\alpha = \int_{\lambda_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)}, \quad \beta = \int_{\lambda_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)}, \quad \gamma = \int_{\lambda_0}^{z} \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Si le troisième nombre γ est la somme $(\alpha + \beta)$ ou la différence $(\alpha - \beta)$ des deux autres, $z = \lambda\ (\alpha \pm \beta)$ doit dépendre d'une certaine manière de x et y, ou de $\lambda\ (\alpha)$ et $\lambda\ (\beta)$; c'est-à-dire qu'on doit avoir $z = \mathrm{F}\ (x, y)$, et l'on se propose de déterminer la fonction F.

Le problème consiste à trouver le paramètre géométrique z d'une troisième surface où la température γ est la somme ou la différence des températures α et β, qui existent sur les deux premières surfaces de la même famille, dont les paramètres géométriques connus sont x et y.

§ XXIV.

CONDITIONS GÉNÉRALES.

La fonction $z = \mathrm{F}\ (x, y)$ doit jouir de plusieurs propriétés qui peuvent conduire à sa connaissance : 1° quand $\beta = 0$, on a $\gamma = \alpha$; donc quand $y = \lambda_0$, z doit se réduire à x; 2° quand $\alpha = 0$, on a $\gamma = \pm \beta$; donc quand $x = \lambda_0$, z doit se réduire à $\pm y$; 3° si l'on prend le signe $+$, ou la somme $\gamma = \alpha + \beta$, z doit être symétrique en x et y. Si, à ces trois conditions, on en joint une quatrième, plus spéciale et particulière à la forme de $\varphi\ (\lambda)$, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer $\mathrm{F}\ (x, y)$.

Appliquons cette méthode à l'un des exemples que nous avons traités ; remontons à son origine, et faisons abstraction de toute connaissance antérieure, sur les transcendantes rencontrées et sur leurs fonctions inverses.

§ XXV.

FONCTIONS INVERSES DES CYLINDRES HYPERBOLIQUES.

Prenons la famille des cylindres hyperboliques homofocaux, dont l'équation primitive est

$$(1) \qquad \frac{X^2}{\lambda^2} - \frac{Y^2}{\lambda'^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + \lambda'^2 = c^2.$$

Par la substitution de $c^2 - \lambda^2$ à λ'^2, et l'application de la méthode de recherche du paramètre thermométrique, on vérifie que cette famille est isotherme : on trouve $\frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}$ ou $-\frac{\lambda}{\lambda'^2}$ pour le rapport $S\frac{d^2\lambda}{du^2} : S\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2$. Posant $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}$, on peut prendre $\varphi = \sqrt{c^2 - \lambda^2}$, d'où

$$\varepsilon = \int \frac{d\lambda}{\varphi} = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2 - \lambda^2}};$$

et comme la relation $\lambda^2 + \lambda'^2 = c^2$ donne $\lambda d\lambda + \lambda' d\lambda' = 0$, ou $\frac{d\lambda}{\sqrt{c^2 - \lambda^2}} = -\frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2 - \lambda'^2}}$, on aura aussi

$$\varepsilon = \int_{\lambda'}^c \frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2 - \lambda'^2}};$$

on a donc la double transcendante

$$(2) \qquad \varepsilon = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2 - \lambda^2}} = \int_{\lambda'}^c \frac{d\lambda'}{\sqrt{c^2 - \lambda'^2}}.$$

Pour simplifier, posons $\lambda = cu$, $\lambda' = cu'$; u et u' seron précisément les deux fonctions inverses qu'il s'agit d'étudier, et que nous désignerons, u par $\mathcal{S}(\varepsilon)$, et u' par $\mathcal{C}(\varepsilon)$. L'équation (1) deviendra

$$(1\ bis)\qquad \frac{X^2}{u^2}-\frac{Y^2}{u'^2}=c^2,\quad \text{où}\quad u^2+u'^2=1,$$

et la double transcendante sera

$$(2\ bis)\qquad \varepsilon=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int_{u'}^1\frac{du'}{\sqrt{1-u'^2}}.$$

Soit représentée par q la valeur de ε correspondante à $u=1$, et conséquemment à $u'=0$, on aura l'intégrale définie unique

$$(3)\qquad q=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Si l'on retranche, de cette valeur particulière, la valeur générale (2 *bis*), la différence pourra se mettre sous la double forme

$$(4)\qquad q-\varepsilon=\int_u^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int_0^{u'}\frac{du'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

§ XXVI.

CONDITION SPÉCIALE.

Toutes ces préparations faites, passons à l'application de la méthode indiquée. Posant

$$\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \beta=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad \gamma=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$
$$\gamma=\alpha\pm\beta,\quad z=F(x,y);$$

aux trois conditions générales, pouvant servir à déterminer la fonction F, et ci-dessus définies, nous joindrons cette quatrième condition, particulière ou spéciale : 4° si, prenant le signe —, ou $\gamma = \alpha - \beta$, on pose $\alpha = q$ ou $x = 1$, $\beta = \varepsilon$ ou $y = u$, on a $\gamma = q - \varepsilon$, et l'équation (4) exige que

$$z = u' = \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - y^2};$$

en un mot, pour $x = 1$, z doit se réduire à $\sqrt{1 - y^2}$.

§ XXVII.

APPLICATION DE LA MÉTHODE.

La fonction la plus simple qui satisfasse aux quatre conditions réunies, est

$$(5)\qquad U = x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2},$$

qui donne

$$(6)\qquad \sqrt{1 - U^2} = \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \mp xy,$$

comme on le vérifie aisément, en remarquant que la somme des carrés des valeurs (5) et (6) est

$$x^2(1 - y^2) + y^2(1 - x^2) + (1 - x^2)(1 - y^2) + x^2y^2$$

et se réduit à l'unité. Or, la différentielle de U (5) est

$$dU = dx\left(\sqrt{1 - y^2} \mp \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + dy\left(-\frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}} \pm \sqrt{1 - x^2}\right),$$

ou bien, par une transformation facile,

$$dU = \left(\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \mp xy\right)\left(\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}\right);$$

ce qui donne, d'après (6),

$$\frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

c'est-à-dire, en observant que $U = 0$ pour $x = 0$ et $y = 0$, et intégrant

$$\int_0^U \frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}} = \alpha \pm \beta = \gamma.$$

Donc $U = z$, et les deux relations (5) et (6) donnent

$$(7) \qquad \begin{cases} z = x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2}, \\ \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \mp xy. \end{cases}$$

§ XXVIII.

FORMULES ET PÉRIODICITÉ.

Introduisant maintenant les symboles $\mathcal{A}(\varepsilon)$ pour u, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ pour u', les équations (7) s'écriront ainsi :

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}(\alpha \pm \beta) = \mathcal{A}(\alpha)\,\mathcal{B}(\beta) \pm \mathcal{A}(\beta)\,\mathcal{B}(\alpha), \\ \mathcal{B}(\alpha \pm \beta) = \mathcal{B}(\alpha)\,\mathcal{B}(\beta) \mp \mathcal{A}(\alpha)\,\mathcal{A}(\beta). \end{cases}$$

Sachant, d'après (2 *bis*) et (3), que $\mathcal{A}(o) = 0$, $\mathcal{B}(o) = 1$, et que $\mathcal{A}(q) = 1$, $\mathcal{B}(q) = 0$, on formera aisément, par des substitutions successives faites dans les formules (8), le tableau suivant :

$$(9) \qquad \begin{array}{c} \mathcal{A}^2(\varepsilon) + \mathcal{B}^2(\varepsilon) = 1, \\ \begin{array}{rccccc} \varepsilon = & 0, & q, & 2q, & 3q, & 4q, \\ \mathcal{A} = & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, \\ \mathcal{B} = & 1, & 0, & -1, & 0, & 1, \end{array} \\ \mathcal{A}(\pm\beta) = \pm\mathcal{A}(\beta), \qquad \mathcal{B}(\pm\beta) = \mathcal{B}(\beta), \\ \mathcal{A}(q \pm \beta) = \mathcal{B}(\beta), \qquad \mathcal{B}(q \pm \beta) = \mp\mathcal{A}(\beta), \\ \mathcal{A}(\ \ + 4q) = \mathcal{A}(\alpha), \qquad \mathcal{B}(\alpha + 4q) = \mathcal{B}(\alpha), \end{array}$$

où toutes les propriétés directes et réciproques des fonctions inverses $\mathcal{A}(\varepsilon)$, $\mathcal{B}(\varepsilon)$, se trouvent concentrées. On y voit, entre autres, que la fonction $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est *impaire* en ε, c'est-à-dire qu'elle change de signe et s'annule avec sa variable; que la fonction $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ est *paire,* c'est-à-dire qu'elle conserve la même valeur quand sa variable change de signe; enfin que ces deux fonctions sont *périodiques,* la période étant $4q$, c'est-à-dire qu'elles reprennent la même valeur quand la variable augmente de $4q$.

§ XXIX.

DÉTERMINATION DE LA PÉRIODE.

Une propriété connue de l'hyperbole conduit à la valeur numérique de la période $4q$. Construisons sur le plan des bases des cylindres une des hyperboles homofocales avec ses asymptotes, et, en outre, le cercle de rayon 1 dont le centre est à l'origine; désignons par ω l'arc de ce cercle compris entre son intersection avec l'axe des Y, et son point de rencontre avec l'une des asymptotes. On sait qu'en abaissant de ce dernier point une perpendiculaire sur la ligne des foyers, la longueur de cette perpendiculaire sera $\frac{\lambda'}{c}$ ou u', et la distance de son pied au centre sera $\frac{\lambda}{c}$ ou u.

Cela posé, si l'on passe à l'hyperbole infiniment voisine de la première, l'arc ω augmentera de $d\omega$, u de du, u' diminuera de du', et l'on conclura facilement, de la similitude (par perpendicularité) du triangle infinitésimal dont les côtés sont $(d\omega, du, -du')$ avec le triangle aux côtés $(1, u', u)$, que

$$\frac{du}{u'} = -\frac{du'}{u} = d\omega.$$

Or la double transcendante (2 *bis*), différentiée, donne aussi

$$\frac{du}{u'} = -\frac{du'}{u} = d\iota;$$

donc $d\varepsilon = d\omega$, et, d'après la communauté d'origine, $\varepsilon = \omega$. Ainsi, on peut prendre pour paramètre thermométrique de la famille de cylindres hyperboliques homofocaux, l'arc ω qui vient d'être défini, ou désigner cet arc par ε.

D'après cette interprétation géométrique, l'extrémité mobile de l'arc ω ou ε détermine une des asymptotes de l'hyperbole qui sert de base au cylindre dont le paramètre thermométrique est ε; or, quand ε croît continuellement, et dans le même sens, l'extrémité mobile revient aux mêmes points à chaque révolution : donc, quand ε augmente de 2π, l'asymptote, l'hyperbole, et les fonctions inverses, redeviennent les mêmes. Ainsi, la période $4q$ n'est autre que 2π.

§ XXX.

AVANTAGES DE CETTE APPLICATION.

Cessant de faire abstraction de toute connaissance antérieurement acquise, nous retrouvons, dans les fonctions inverses, $\mathcal{A}(\varepsilon)$, $\mathcal{B}(\varepsilon)$, les fonctions trigonométriques $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$. Mais ici les formules (8), ou celles de $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$, étant établies analytiquement, et non par des démonstrations géométriques, on n'a pas à se préoccuper de leur généralité; aucune addition n'est nécessaire à cet égard.

Telle est la méthode à suivre pour obtenir les relations qui font connaître toutes les propriétés des fonctions inverses. Si la première application que nous venons d'en faire paraît trop simple, et par trop élémentaire, à cause du peu de nouveauté des résultats, nous en ferons bientôt une application plus sérieuse et plus nouvelle; elle reproduira, en quelque sorte, les mêmes mots, les mêmes phases, et l'exemple précédent aura puissamment contribué à en simplifier l'exposition.

§ XXXI.

FONCTIONS INVERSES DES ELLIPSOIDES PLANÉTAIRES.

Lorsque l'on connaît les fonctions inverses d'une famille de surfaces isothermes, si les fonctions inverses d'une autre famille peuvent s'exprimer à l'aide des premières, cette liaison suffira pour étudier leurs propriétés. Appliquons ce procédé, dont nous ferons un fréquent usage, à l'étude des fonctions inverses appartenant aux ellipsoïdes planétaires ayant pour équation

$$(10)\qquad \frac{X^2+Y^2}{\lambda^2}+\frac{Z^2}{\lambda'^2}=1,\quad \text{où}\quad \lambda^2-\lambda'^2=c^2.$$

Par la substitution de λ^2-c^2 à λ'^2, et l'application de la méthode de recherche du paramètre thermométrique, on arrive définitivement à

$$\varepsilon=c\int_c^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda^2-c^2}}.$$

Pour simplifier, posons $\lambda=c\varpi$, $\lambda'=c\varpi'$; ϖ et ϖ' seront précisément les deux fonctions inverses qu'il s'agit d'étudier, et que nous désignerons, ϖ par $\mathcal{A}_1(\varepsilon)$, ϖ' par $\mathcal{B}_1(\varepsilon)$. L'équation (10) deviendra

$$(10\ bis)\qquad \frac{X^2+Y^2}{\varpi^2}+\frac{Z^2}{\varpi'^2}=c^2,\quad \text{où}\quad \varpi^2-\varpi'^2=1.$$

La transcendante ε, les deux fonctions inverses, et la valeur Q de ε correspondante à $\varpi=\infty$, seront

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon=\displaystyle\int_1^\varpi \frac{d\varpi}{\varpi\sqrt{\varpi^2-1}},\quad Q=\int_1^\infty \frac{d\varpi}{\varpi\sqrt{\varpi^2-1}};\\ \varpi=\mathcal{A}_1(\varepsilon),\quad \varpi'=\sqrt{\varpi^2-1}=\mathcal{B}_1(\varepsilon).\end{array}\right.$$

Or, si l'on introduit une nouvelle fonction u de ε, telle que

$$(12)\qquad \sqrt{1-u^2}=\frac{1}{w},\ \text{d'où}\ u=\frac{\sqrt{w^2-1}}{w},\ \text{et}\ du=\frac{dw}{w^2\sqrt{w^2-1}},$$

il s'ensuivra

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dw}{w\sqrt{w^2-1}},$$

et intégrant, puisque u s'annule quand $w=1$,

$$(13)\qquad \varepsilon=\int_1^w \frac{dw}{w\sqrt{w^2-1}}=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

De telle sorte que u et $\sqrt{1-u^2}$ seront précisément les fonctions inverses $\mathcal{A}(\varepsilon)$ et $\mathcal{B}(\varepsilon)$ des cylindres hyperboliques, et que

$$Q=\int_1^\infty \frac{dw}{w\sqrt{w^2-1}}=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=q=\frac{\pi}{2}.$$

§ XXXII.

FORMULES ET PROPRIÉTÉS.

Les relations (12), exprimées en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, donneront donc

$$(14)\qquad \mathcal{B}(\varepsilon)=\frac{1}{\mathcal{A}_1(\varepsilon)},\quad \mathcal{A}(\varepsilon)=\frac{\mathcal{B}_1(\varepsilon)}{\mathcal{A}_1(\varepsilon)},$$

ou inversement, par l'isolement des $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$,

$$(15)\qquad \mathcal{A}_1(\varepsilon)=\frac{1}{\mathcal{B}(\varepsilon)},\quad \mathcal{B}_1(\varepsilon)=\frac{\mathcal{A}(\varepsilon)}{\mathcal{B}(\varepsilon)}.$$

A l'aide de ces dernières formules et des valeurs diverses du tableau (9), on composera le nouveau tableau

$$
(16)\qquad
\begin{array}{c}
\mathcal{A}_1^2(\varepsilon) - \mathcal{B}_1^2(\varepsilon) = 1, \\
\begin{array}{llllll}
\varepsilon = 0, & q, & 2q, & 3q, & 4q, \\
\mathcal{A}_1 = 1, & \infty, & -1, & \infty, & 1, \\
\mathcal{B}_1 = 0, & +\infty-, & 0, & +\infty-, & 0,
\end{array} \\
\mathcal{A}_1(\pm\beta) = \mathcal{A}_1(\beta), \qquad \mathcal{B}_1(\pm\beta) = \pm\mathcal{B}_1(\beta), \\
\mathcal{A}_1(\alpha + 4q) = \mathcal{A}_1(\alpha), \qquad \mathcal{B}_1(\alpha + 2q) = \mathcal{B}_1(\alpha).
\end{array}
$$

La fonction $\mathcal{A}_1$ est paire, la fonction $\mathcal{B}_1$ est impaire; ces deux fonctions sont périodiques; la période est $4q$ ou 2π pour $\mathcal{A}_1$, $2q$ ou π pour $\mathcal{B}_1$. Les valeurs (14) transforment les formules (8) dans les suivantes :

$$
(17)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\alpha \pm \beta) &= \frac{\mathcal{A}_1(\alpha)\,\mathcal{A}_1(\beta)}{1 \mp \mathcal{B}_1(\alpha)\,\mathcal{B}_1(\beta)}, \\
\mathcal{B}_1(\alpha \pm \beta) &= \frac{\mathcal{B}_1(\alpha) \pm \mathcal{B}_1(\beta)}{1 \mp \mathcal{B}_1(\alpha)\,\mathcal{B}_1(\beta)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Tout cela n'est pas neuf, car les fonctions inverses $\mathcal{A}_1(\varepsilon)$, $\mathcal{B}_1(\varepsilon)$ ne sont autres que séc ε et tang ε. Mais c'est l'analyse qui assigne ici les périodes et les variations de signe de ces deux fonctions inverses, et il n'y a pas lieu de se préoccuper de leurs causes géométriques; ce qui réduit à néant une multitude de discussions métaphysiques, et entre autres les opinions contradictoires sur le changement de signe de la sécante.

§ XXXIII.

INTRODUCTION DES IMAGINAIRES.

Au premier procédé que nous venons de décrire, et qui permet de passer d'un groupe de fonctions inverses à un autre par une transformation réelle, il faudrait en joindre un second remplissant le même but à l'aide d'une transformation par imaginaires. Mais, au lieu de définir ici ce nouveau procédé, nous préférons indiquer comment les imaginaires s'introduisent naturellement dans l'étude des surfaces isothermes et de leurs fonctions inverses.

Supposons un élève qu'on aurait initié aux mathématiques, au calcul différentiel, au calcul intégral, sans lui parler de trigonométrie, de lignes trigonométriques, de transcendantes d'aucune espèce. Qu'on lui présente la théorie des surfaces isothermes dans l'ordre que nous avons suivi, en appuyant sur la nécessité d'exprimer les paramètres géométriques des surfaces considérées et reconnues isothermes en fonction du paramètre thermométrique. Il rencontrera d'abord la fonction inverse e^ε, dont il établira et étudiera le développement

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{1}+\frac{\varepsilon^2}{1.2}+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}+\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}+\frac{\varepsilon^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right)$$

par les méthodes actuellement usitées dans l'algèbre. On lui fera remarquer que ce développement se compose de deux parties, l'une *paire*, l'autre *impaire*,

$$1+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{2.3.4}+\ldots=\frac{e^\varepsilon+e^{-\varepsilon}}{2}=\mathrm{E}(\varepsilon),$$

$$\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{2.3}+\frac{\varepsilon^5}{2.3.4.5}+\ldots=\frac{e^\varepsilon-e^{-\varepsilon}}{2}=\mathcal{E}(\varepsilon).$$

Abordant les cylindres elliptiques isothermes, il reconnaîtra dans les valeurs $\lambda=c\mathrm{E}(\varepsilon)$, $\lambda'=c\mathcal{E}(\varepsilon)$, ou dans les fonctions inverses de cette famille les deux parties détachées de e^ε. Prenant ensuite les cylindres hyperboliques isothermes, il trouvera d'autres fonctions inverses $\mathrm{F}(\varepsilon)=\frac{\lambda}{c}$, $\mathcal{F}(\varepsilon)=\frac{\lambda'}{c}$: mais, sachant qu'on passe de toutes les propriétés de l'ellipse à celles de l'hyperbole, par le simple changement de λ'^2 en $-\lambda'^2$, ou de λ' en $\lambda'\sqrt{-1}$, il reconnaîtra que $F(\varepsilon)$ et $\mathfrak{F}(\varepsilon)$ ne diffèrent de $E(\varepsilon)$ et $\mathcal{E}(\varepsilon)$ qu'en ce que ε^2 y est changé en $-\varepsilon^2$, d'où il conclura

$$F(\varepsilon) = E(\varepsilon\sqrt{-1}), \qquad \mathfrak{F}(\varepsilon) = \frac{\mathcal{E}(\varepsilon\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

où

$$F(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{2.3.4} - \frac{\varepsilon^6}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\mathfrak{F}(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2.3} + \frac{\varepsilon^5}{2.3.4.5} - \frac{\varepsilon^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

Il constatera la périodicité nécessaire et réelle de ces nouvelles fonctions; et apprendra leur signification trigonométrique $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, en partant des méthodes exposées aux §§ 27, 28 et 29.

§ XXXIV.

ORIGINE DES PÉRIODES IMAGINAIRES.

Revenant aux premières fonctions $E(\varepsilon)$, $\mathcal{E}(\varepsilon)$, il conclura de leur dépendance avec les secondes $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, que si ces dernières ont une période réelle, les autres ont conséquemment une *période imaginaire*. Puis, quand il aura étudié toutes les familles de surfaces de nos deux premières leçons, et qu'il sera parvenu aux prévisions du § 21, il y joindra celle-ci : que les fonctions inverses des familles de surfaces homofocales et isothermes du second ordre, pour lesquelles le rapport $\frac{b}{c}$ n'est ni zéro, ni l'unité, devant réunir à la fois toutes les propriétés des douze fonctions inverses particulières, seules classiquement connues, auront très-probablement chacune deux périodes, l'une réelle, l'autre imaginaire.

Une telle marche, substituée à l'enseignement habituel, serait à la fois plus rapide et plus complète. Elle introduirait l'emploi des imaginaires de la manière la plus simple et la plus lucide ; elle établirait une liaison naturelle entre les chapitres les plus importants du calcul intégral, entre les transcendantes circulaires et logarithmiques, entre les fonctions trigonométriques et exponentielles. Elle ferait comprendre la nécessité d'aborder, dans les cours classiques, les transcendantes et les fonctions elliptiques, si unanimement réclamées par toutes les branches progressives des mathématiques appliquées ; enfin elle faciliterait singulièrement cette nouvelle étude, comme nous nous proposons de le démontrer.

On reconnaîtra sans doute un jour que les programmes de l'enseignement d'une science principalement destinée aux applications devraient toujours suivre fidèlement les progrès de cette science, se modifier avec elle, adopter, dès leur origine, les instruments des nouvelles découvertes, les substituer même aux anciens, dont l'impuissance et la stérilité actuelles sont suffisamment constatées. On sentira que cette mobilité des programmes, sagement réglementée, accélérerait les progrès des sciences appliquées, en formant, par un apprentissage mieux approprié, un plus grand nombre de bons et d'ardents travailleurs. Pour comprendre combien cette vérité si évidente est aujourd'hui méconnue, qu'on lise les programmes officiels de l'enseignement des mathématiques pures, ils sont tels que les auraient faits Laplace et ses élèves ; on n'y trouve pas trace des découvertes, si importantes pour l'avenir, de Fourier, d'Abel, de Jacobi, de Sturm et d'autres géomètres modernes, dont les efforts incessants ont enfin réussi à faire marcher la science en dehors de la *Mécanique céleste*.

QUATRIÈME LEÇON.

Transcendantes et fonctions inverses dans le cas général des surfaces isothermes du second ordre. — Nouvelle application de la méthode d'étude — Formules d'Euler. — Propriétés des fonctions inverses des hyperboloïdes à deux nappes. — Leurs tracés graphiques.

§ XXXV.

TRANSCENDANTE ε DANS TROIS CAS GÉNÉRAUX.

Abordons enfin l'étude des fonctions inverses dans le cas général de l'exemple VI, défini par la seconde leçon. Il s'agit des surfaces du second ordre, concentriques et homofocales, représentées par l'équation

$$(1) \qquad \frac{X^2}{\lambda^2} + \frac{Y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{Z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

où la constante c surpasse b; le rapport $\frac{b}{c}$ étant d'ailleurs quelconque. Nous avons vérifié, § 13, que ces surfaces sont isothermes. Cette vérification conduit à la relation

$$(2) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - b^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2};$$

et la fonction φ a des valeurs différentes suivant que λ est inférieur à b, compris entre b et c, ou supérieur à c. Désignons le paramètre géométrique λ par ν dans le premier cas, par μ dans le second, par ρ dans le troisième; on pourra prendre pour φ et pour le paramètre thermométrique ε les expressions du tableau suivant :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}}{c}, & \varepsilon &= c\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}},\\
\varphi &= \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}}{c}, & \varepsilon &= c\int_b^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}},\\
\varphi &= \frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\,\sqrt{\rho^2-c^2}}{c}, & \varepsilon &= c\int_c^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\,\sqrt{\rho^2-c^2}};
\end{aligned}
\right.
$$

ϖ, ϖ_1, ϖ_2 étant les valeurs particulières de ε qui correspondent respectivement à $\nu = b$, à $\mu = c$, à $\rho = \infty$, on aura

$$
(3\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varpi &= c\int_0^{b} \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}},\\
\varpi_1 &= c\int_b^{c} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}},\\
\varpi_2 &= c\int_c^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\,\sqrt{\rho^2-c^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ XXXVI.

FONCTIONS INVERSES DES TROIS FAMILLES.

Les trois axes de toute surface (1) sont trois paramètres géométriques également importants. Il convient donc d'introduire trois fonctions pour chacun des trois cas. Nous les désignerons par les symboles inscrits au nouveau tableau

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\nu &= c\mathrm{A}(\varepsilon), & \sqrt{b^2-\nu^2} &= c\mathrm{B}(\varepsilon), & \sqrt{c^2-\nu^2} &= c\mathrm{C}(\varepsilon),\\
\mu &= c\mathrm{A}_1(\varepsilon), & \sqrt{\mu^2-b^2} &= c\mathrm{B}_1(\varepsilon), & \sqrt{c^2-\mu^2} &= c\mathrm{C}_1(\varepsilon),\\
\rho &= c\mathrm{A}_2(\varepsilon), & \sqrt{\rho^2-b^2} &= c\mathrm{B}_2(\varepsilon), & \sqrt{\rho^2-c^2} &= c\mathrm{C}_2(\varepsilon).
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations des trois familles de surfaces isothermes aux paramètres ν, μ, ρ exprimées à l'aide du paramètre thermométrique, seront

$$\frac{X^2}{A^2(\varepsilon)} - \frac{Y^2}{B^2(\varepsilon)} - \frac{Z^2}{C^2(\varepsilon)} = c^2,$$
$$\frac{X^2}{A_1^2(\varepsilon)} + \frac{Y^2}{B_1^2(\varepsilon)} - \frac{Z^2}{C_1^2(\varepsilon)} = c^2,$$
$$\frac{X^2}{A_2^2(\varepsilon)} + \frac{Y^2}{B_2^2(\varepsilon)} + \frac{Z^2}{C_2^2(\varepsilon)} = c^2.$$

La première famille se compose d'hyperboloïdes à deux nappes, la seconde d'hyperboloïdes à une nappe, la troisième d'ellipsoïdes. Ces surfaces sont *conjuguées,* en ce sens que les constantes b et c ont pour toutes les mêmes valeurs, ou que les sections principales de ces surfaces ont les mêmes foyers.

§ XXXVII.

RELATIONS ALGÉBRIQUES ET DIFFÉRENTIELLES.

Si l'on représente par k et k' les deux rapports $\frac{b}{c}$, $\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}$, lesquels sont *complémentaires,* en ce sens que $k^2 + k'^2 = 1$, on déduit du tableau (4) les relations suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} A^2 + B^2 = k^2, & A^2 + C^2 = 1, & C^2 - B^2 = k'^2, \\ A_1^2 - B_1^2 = k^2, & A_1^2 + C_1^2 = 1, & B_1^2 + C_1^2 = k'^2, \\ A_2^2 - B_2^2 = k^2, & A_2^2 - C_2^2 = 1, & B_2^2 - C_2^2 = k'^2, \end{cases}$$

en supprimant l'indication de la variable ε qui est la même pour les neuf fonctions.

La différentiation des transcendantes ε (3) et des relations (5) conduit facilement aux différentielles suivantes :

$$
(6) \quad \begin{cases}
dA = BC\,d\varepsilon, & dB = -CA\,d\varepsilon, & dC = -AB\,d\varepsilon, \\
dA_1 = B_1C_1\,d\varepsilon, & dB_1 = C_1A_1\,d\varepsilon, & dC_1 = -A_1B_1\,d\varepsilon, \\
dA_2 = B_2C_2\,d\varepsilon, & dB_2 = C_2A_2\,d\varepsilon, & dC_2 = A_2B_2\,d\varepsilon.
\end{cases}
$$

Ainsi, dans chaque groupe (A_i, B_i, C_i) la dérivée d'une des trois fonctions inverses est égale au produit des deux autres, pris avec le signe $+$, si $i = 2$, ou s'il s'agit de A, A_1, B_1, avec le signe $-$ pour B, C, C_1. C'est évidemment la généralisation d'une propriété commune aux fonctions trigonométriques et exponentielles. Les relations (5) généralisent aussi celles qui existent entre le sinus et le cosinus, entre la sécante et la tangente, la cosécante et la cotangente, sans H ou avec H. On rencontrera à chaque pas des rapprochements analogues; nous ne les signalerons plus.

§ XXXVIII.

NOUVELLE APPLICATION DE LA MÉTHODE D'ÉTUDE.

Ce sont les neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i) dont il s'agit de découvrir les propriétés. Commençons par les fonctions (A, B, C), ou par les premières lignes des tableaux (3), (4), (5) et (6). Pour appliquer la méthode d'étude du § 23, posons

$$
(7) \quad \begin{cases}
\alpha = c \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}\,\sqrt{c^2 - x^2}}, \\
\beta = c \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}\,\sqrt{c^2 - y^2}}, \\
\gamma = c \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{b^2 - y^2}\,\sqrt{c^2 - z^2}}, \\
\gamma = \alpha \pm \beta, \qquad z = F(x, y).
\end{cases}
$$

Aux trois conditions générales du paragraphe 24, il faut en joindre une quatrième, particularisée par la fonction φ, ou par la transcendante ε exprimée en ν. Nos recherches préliminaires conduisent à une condition spéciale, qui laisse peu de chose à deviner, pour assigner la forme de la fonction F, la voici :

§ XXXIX.

CONDITION SPÉCIALE.

Lorsque $b = c$, la transcendante devient

$$\varepsilon = c \int_0^{\nu} \frac{d\nu}{c^2 - \nu},$$

et le rapport $\frac{\nu}{c}$ n'est autre que l'hypotangente de ε, ou l'une des fonctions inverses des hyperboloïdes de révolution, § 17; désignons cette fonction par le symbole $\mathfrak{T}(\varepsilon)$, on aura, pour $b = c$,

$$x = c\mathfrak{T}(\alpha), \quad y = c\mathfrak{T}(\beta), \quad z = c\mathfrak{T}(\alpha \pm \beta).$$

Or la formule du § 32, qui donne $\mathfrak{Ab}_1(\alpha \pm \beta)$ en $\mathfrak{Ab}_1(\alpha)$ et $\mathfrak{Ab}_1(\beta)$, ou tang $(\alpha \pm \beta)$ en tang (α) et tang (β), exprimera facilement $\mathfrak{T}(\alpha \pm \beta)$ en $\mathfrak{T}(\alpha)$ et $\mathfrak{T}(\beta)$; car il suffit, d'après notre § 33, d'y substituer $\frac{\mathfrak{T}}{\sqrt{-1}}$ à $\mathfrak{Ab}_1$; ce qui donne, sans difficulté,

$$\mathfrak{T}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathfrak{T}(\alpha) \pm \mathfrak{T}(\beta)}{1 \pm \mathfrak{T}(\alpha)\,\mathfrak{T}(\beta)},$$

formule que l'on vérifie d'ailleurs directement en remplaçant $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ par $\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{\mathrm{E}(\varepsilon)}$; il s'ensuit

$$z = c\,\frac{\mathfrak{T}(\alpha) \pm \mathfrak{T}(\beta)}{1 \pm \mathfrak{T}(\alpha)\,\mathfrak{T}(\beta)} = c^2\,\frac{x \pm y}{c^2 \pm xy};$$

valeur qu'on peut mettre sous la forme

$$(8)\qquad z = c^2\,\frac{x(c^2-y^2) \pm y(c^2-x^2)}{c^4 - x^2y^2}.$$

Ainsi, comme condition spéciale, la fonction $z = \mathrm{F}(x, y)$ (7) doit être telle, que, si l'on y fait $b = c$, elle se réduise à la valeur (8).

§ XL.

DÉTERMINATION DE LA FONCTION F.

La fonction la plus simple qui satisfasse aux quatre conditions réunies est

$$(9)\quad u = bc\,\frac{x\sqrt{b^2-y^2}\sqrt{c^2-y^2} \pm y\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{c^2-x^2}}{b^2c^2 - x^2y^2},$$

ou bien, désignant, pour simplifier, par η le produit des deux radicaux en y, par ξ celui des deux radicaux en x,

$$(9\ bis)\qquad u = bc\,\frac{x\eta \pm y\xi}{b^2c^2 - x^2y^2}.$$

Il s'agit de prouver que cette fonction u est précisément z.

Pour cela, posant $v = \sqrt{b^2 - u^2}$, $w = \sqrt{c^2 - u^2}$, la substitution de u (9) donne.

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} v &= b\,\frac{c^2\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{b^2-y^2} \mp xy\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2}}{b^2c^2-x^2y^2},\\ w &= c\,\frac{b^2\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2} \mp xy\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{b^2-y^2}}{b^2c^2-x^2y^2}. \end{aligned}\right.$$

[Ce que l'on vérifie sans peine : car, si l'on fait la somme des carrés de u (9) et v (10), les doubles signes disparaîtront au second membre, et $\dfrac{b^2}{(b^2c^2 - x^2y^2)^2}$ y sera facteur commun de

$$\begin{aligned}&\{c^2(b^2-y^2)[x^2(c^2-y^2) + c^2(b^2-x^2)\\ &+ y^2(c^2-x^2)[c^2(b^2-x^2) + x^2(c^2-y^2)]\},\end{aligned}$$

expression qui se réduit à $(b^2c^2 - x^2y^2)^2$; donc $u^2 + v^2 = b^2$; et de même $u^2 + w^2 = c^2$.] Le produit vw, ou celui-ci $\sqrt{b^2 - u^2}\,\sqrt{c^2 - u^2}$, que nous appellerons U, peut se mettre sous la forme

$$(11)\quad \mathrm{U} = bc\,\frac{(b^2c^2 + x^2y^2)\,\xi\eta \mp xy\,[c^2(b^2 - x^2)(b^2 - y^2) + b^2(c^2 - x^2)(c^2 - y^2)]}{(b\;c^2 - x^2y^2)^2}.$$

Cela posé, cherchons la dérivée en x de u (9 *bis*), observant que $\xi = \sqrt{b^2c^2 - (b^2 + c^2)\,x^2 + x^4}$ donne $\xi\,d\xi = -x\,(b^2 + c^2 - 2x^2)$, on trouve d'abord

$$\frac{du}{dx} = bc\,\frac{(b^2c^2 - x^2y^2)\left(\eta \mp xy\,\dfrac{b^2 + c^2 - 2x^2}{\xi}\right) + 2y^2\,(x^2\eta \pm xy\,\xi)}{(b^2c^2 - x^2y^2)^2},$$

et l'on reconnaît aisément que cette valeur, multipliée par ξ, reproduit précisément U (11); ainsi $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\mathrm{U}}{\xi}$. Écrivons u (9 *bis*) de cette manière

$$u = \pm\, bc\,\frac{y\xi \pm x\eta}{b^2c^2 - x^2y^2},$$

avant de prendre sa dérivée en y; cette nouvelle valeur de u sera le produit par ± 1 de ce que devient la première quand on y change x en y, et réciproquement y en x; on aura donc (puisque U est symétrique en x et y) immédiatement $\dfrac{du}{dy} = \pm\dfrac{\mathrm{U}}{\eta}$.

Réunissant les deux différentielles partielles de u, on a pour sa différentielle totale

$$du = \frac{\mathrm{U}}{\xi}\,dx \pm \frac{\mathrm{U}}{\eta}\,dy,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = \frac{dx}{\xi} \pm \frac{dy}{\eta}.$$

Multipliant par c, ayant égard aux valeurs respectives de U, ξ, η en u, x, y, et observant que u s'annule quand x et y sont zéro l'un et l'autre, l'intégration donnera

$$c\int_0^u \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\sqrt{c^2-u^2}} = \alpha \pm \beta,$$

on a donc

$$u = z = \mathrm{A}(\alpha \pm \beta), \quad v = \sqrt{b^2 - z^2}, \quad w = \sqrt{c^2 - z^2};$$

et la fonction F est maintenant connue.

§ XLI.

FORMULES D'EULER.

L'introduction des symboles (A, B, C) transforme les équations (9) et (10) dans les formules suivantes :

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{A}(\alpha \pm \beta) = k\dfrac{\mathrm{A}(\alpha)\mathrm{B}(\beta)\mathrm{C}(\beta) \pm \mathrm{A}(\beta)\mathrm{B}(\alpha)\mathrm{C}(\alpha)}{k^2 - \mathrm{A}^2(\alpha)\mathrm{A}^2(\beta)}, \\[2ex] \mathrm{B}(\alpha \pm \beta) = k\dfrac{\mathrm{B}(\alpha)\mathrm{B}(\beta) \mp \mathrm{A}(\alpha)\mathrm{A}(\beta)\mathrm{C}(\alpha)\mathrm{C}(\beta)}{k^2 - \mathrm{A}^2(\alpha)\mathrm{A}^2(\beta)}, \\[2ex] \mathrm{C}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{k^2\mathrm{C}(\alpha)\mathrm{C}(\beta) \mp \mathrm{A}(\alpha)\mathrm{A}(\beta)\mathrm{B}(\alpha)\mathrm{B}(\beta)}{k^2 - \mathrm{A}^2(\alpha)\mathrm{A}^2(\beta)}. \end{cases}$$

Cette nouvelle et dernière application de la méthode d'étude du § 23, simplifiée par son analogie avec la première, établit ainsi, sans difficulté, et d'une manière en quelque sorte élémentaire, les formules (12), dues à Euler, et qui, mises sous diverses formes, ont servi de point de départ à toutes les recherches sur les transcendantes et les fonctions elliptiques.

§ XLII.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS (A, B, C).

Les formules précédentes conduisent à toutes les propriétés des fonctions inverses A (ε), B (ε), C (ε), ou des axes des hyperboloïdes isothermes à deux nappes.

Le paramètre thermométrique ε étant zéro avec ν, et égal à ϖ quand $\nu = b$ [tableau (3)], la première ligne du tableau (4) donne

$$A(o) = o, \quad B(o) = k, \quad C(o) = 1;$$
$$A(\varpi) = k, \quad B(\varpi) = o, \quad C(\varpi) = k'.$$

D'après ces valeurs, si l'on fait $\alpha = o$ dans les formules (12), elles donnent respectivement

$$A(\pm\beta) = \pm A(\beta), \quad B(\pm\beta) = B(\beta), \quad C(\pm\beta) = C(\beta).$$

Ainsi A (ε) est une fonction impaire; B (ε) et C (ε) sont des fonctions paires.

Si, prenant les signes inférieurs, on fait, dans les mêmes formules (12), $\alpha = \varpi$, on a, en s'aidant des relations (5),

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} A(\varpi - \beta) &= \frac{B(\beta)}{C(\beta)}, \\ B(\varpi - \beta) &= k'\frac{A(\beta)}{C(\beta)}, \\ C(\varpi - \beta) &= \frac{k'}{C(\beta)}, \end{aligned}\right.$$

formules dont nous déduirons des conséquences importantes, et qui seront fréquemment utilisées dans l'application des procédés de transformation.

Ne prenant plus que les signes supérieurs :

1°. $\alpha = \varpi$, $\beta = \varpi$, donnent

$$A(2\varpi) = o, \quad B(2\varpi) = -k, \quad C(2\varpi) = 1;$$

2°. $\alpha = 2\varpi$, $\beta = \varpi$, donnent

$$A(3\varpi) = -k, \quad B(3\varpi) = o, \quad C(3\varpi) = k';$$

3°. $\alpha = 3\varpi$, $\beta = \varpi$, donnent

$$A(4\varpi) = o, \quad B(4\varpi) = k, \quad C(4\varpi) = 1;$$

ce qui complète le tableau suivant :

$$(14)\quad \begin{cases} \varepsilon = 0, & \varpi, & 2\varpi, & 3\varpi, & 4\varpi, \\ A = 0, & k, & 0, & -k, & 0, \\ B = k, & 0, & -k, & 0, & k, \\ C = 1, & k', & 1, & k', & 1; \end{cases}$$

4°. $\beta = 2\varpi$ donne

$$A(\alpha + 2\varpi) = -A(\alpha),$$
$$B(\alpha + 2\varpi) = -B(\alpha),$$
$$C(\alpha + 2\varpi) = C(\alpha);$$

5°. $\beta = 4\varpi$ donne

$$A(\alpha + 4\varpi) = A(\alpha),$$
$$B(\alpha + 4\varpi) = B(\alpha),$$
$$C(\alpha + 4\varpi) = C(\alpha).$$

§ XLIII.

PÉRIODICITÉ. ANALOGIES.

Ainsi les trois fonctions inverses $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$, sont périodiques. La période est 4ϖ pour $A(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon)$, 2ϖ seulement pour $C(\varepsilon)$.

Par ses variations de signe et de grandeur, la fonction $A(\varepsilon)$ est analogue à $\sin\varepsilon$, $B(\varepsilon)$ à $\cos\varepsilon$; nous appellerons la première un *pseudosinus*, la seconde un *pseudocosinus*. Quant à la troisième fonction $C(\varepsilon)$, qui n'est jamais nulle, et dont la grandeur oscille entre le maximum 1 et le minimum k', elle n'est analogue à aucune ligne trigonométrique, si ce n'est au rayon; nous l'appellerons un *pseudorayon*.

Les formules (13) dans lesquelles $(\varpi - \beta)$ est le *complément de* β, c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à β pour obtenir le quart de la période, prouvent bien que A n'est pas précisément un *sinus*, ni B un *cosinus*, puisque les rapports $\frac{A(\varpi-\beta)}{B(\beta)}$, $\frac{B(\varpi-\beta)}{A(\beta)}$, ne sont pas l'unité, ni même constants. On remarquera que le rapport de ces rapports est constant, et égal à k', comme le produit $C(\beta).C(\varpi-\beta)$; que le produit $A(\beta).A(\varpi-\beta)$ est variable et égal à $-\frac{1}{C}\frac{dC}{d\varepsilon}$; etc.

§ XLIV.

LIMITE DE LA PÉRIODE.

Un tracé graphique peut servir à résumer ces diverses propriétés. Pour construire avec quelque exactitude les trois courbes dont A, B, C seraient les ordonnées, et le paramètre thermométrique ε l'abscisse, il faudrait connaître la période ou le nombre ϖ. Ce nombre est une fonction de k, dont la détermination exige des calculs que nous n'exposerons pas. Disons seulement que ϖ surpasse $\frac{\pi}{2}$, car les deux intégrales définies transcendantes

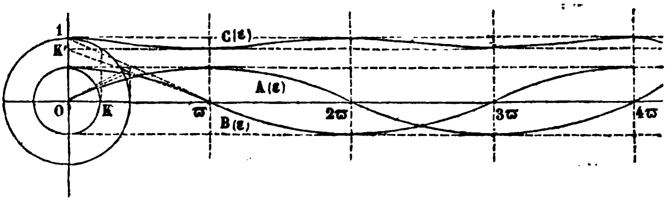
$$\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} = q = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\,\frac{c}{\sqrt{c^2-\nu^2}} = \varpi$$

ont le même nombre d'éléments, et ceux de la seconde sont tous plus grands que ceux de la première.

§ XLV.

TRACÉS GRAPHIQUES.

Si l'on suppose la grandeur ϖ connue, la figure suivante représente les trois courbes dont il s'agit :



Les deux cercles concentriques ont pour rayons l'unité et le rapport k moindre que 1 ; on construit facilement $k' = \sqrt{1-k^2}$. Les deux courbes $Y = A(\varepsilon)$ et $Y = B(\varepsilon)$ sont analogues à la sinusoïde $Y = \sin \varepsilon$; mais leur amplitude $(2k)$ est plus petite, et la tangente à l'inflexion ne fait pas l'angle de 45 degrés avec l'axe des abscisses ; son inclinaison est moindre pour A, moindre encore pour B, car on a, d'après les formules (6),

$$\frac{dA}{d\varepsilon} = BC,$$

dérivée qui devient

$$k \text{ pour } \varepsilon = 0, \quad -k \text{ pour } \varepsilon = 2\varpi,$$

et l'on a pareillement

$$\frac{dB}{d\varepsilon} = -CA,$$

dérivée qui devient

$$-kk' \text{ pour } \varepsilon = \varpi, \quad kk' \text{ pour } \varepsilon = 3\varpi.$$

On sait que les deux courbes $Y = \sin \varepsilon$, $Y = \cos \varepsilon$, sont identiques, c'est-à-dire qu'elles se superposent dans toutes leurs parties, lorsqu'on fait subir à l'une d'entre elles une translation parallèle à l'axe des abscisses et égale au quart de la période. La même translation, effectuée dans le groupe des deux courbes $Y = A(\varepsilon)$, $Y = B(\varepsilon)$, ne produira pas leur superposition ; les points d'inflexion et les sommets se confondront, mais en tout autre lieu les deux courbes seront séparées, la courbe $Y = B(\varepsilon)$ étant toujours plus rapprochée de l'axe des abscisses.

La courbe $Y = C(\varepsilon)$ est analogue aux précédentes, mais avec une période moitié et une amplitude moindre; car cette amplitude est $1 - k'$ qui est égal à $\frac{k^2}{1+k'}$, ou à $k\frac{k}{1+k'}$, et conséquemment moindre que k, moitié de l'amplitude $2k$ commune aux deux courbes A et B. Quant à l'inclinaison de la tangente à l'inflexion, on a, d'après les formules (6),

$$\frac{dC}{d\varepsilon} = -AB, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2C}{d\varepsilon^2} = C(A^2 - B^2);$$

de là résulte qu'à l'inflexion $A = B = \frac{k}{\sqrt{2}}$, et conséquemment $\frac{dC}{d\varepsilon}$ est égal à $-\frac{k^2}{2}$, ou à $+\frac{k^2}{2}$, suivant le rang impair ou pair du point de cette inflexion.

L'abscisse de tout point d'inflexion de la courbe $Y = C(\varepsilon)$ étant donnée par l'équation $A^2(\varepsilon) = B^2(\varepsilon)$, la parallèle à l'axe des ordonnées, menée par ce point, contiendra une intersection des deux courbes $Y = A(\varepsilon)$ et $Y = B(\varepsilon)$, si le rang est impair; elle coupera ces courbes en des points dont les ordonnées seront égales et de signes contraires, si le rang est pair. La ligne, parallèle aux abscisses, qui contient tous les points d'inflexion de la courbe C, ne la partage pas en parties égales, comme cela a lieu pour les courbes A et B; ici les parties supérieures sont plus courtes que les parties inférieures : en effet, l'ordonnée $\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}$, ou $\sqrt{\frac{1+k'^2}{2}}$, aux points d'inflexion de la courbe C, surpasse la demi-somme $\frac{1+k'}{2}$ des ordonnées aux sommets, puisque $\frac{1+k'^2}{2} = \left(\frac{1+k'}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-k'}{2}\right)^2$. Ainsi, quant à la forme, la courbe C diffère notablement des courbes A et B; elle est, en quelque sorte, moins parfaite ou moins symétrique.

§ XLVI.

CLASSEMENT DE PROPRIÉTÉS.

Par tout ce qui précède, le pseudosinus $A(\varepsilon)$, le pseudocosinus $B(\varepsilon)$, et le pseudorayon $C(\varepsilon)$, nous paraissent au moins aussi complétement définis que les fonctions trigonométriques $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$. Il ne leur manque qu'un plus long usage ou des applications plus nombreuses; les progrès incessants des mathématiques ne tarderont pas à combler cette lacune.

Mais tout n'est pas dit sur les fonctions A, B, C; nous n'avons signalé que celles de leurs propriétés qui correspondent toutes aux propriétés de $\sin\varepsilon$ et de $\cos\varepsilon$; l'introduction des imaginaires, et la liaison de ces fonctions inverses avec celles qui appartiennent aux deux autres familles de surfaces isothermes (des hyperboloïdes à une nappe et des ellipsoïdes), nous conduiront à une seconde classe de propriétés tout aussi étendue que la première.

Pour connaître les propriétés spéciales des deux autres groupes de fonctions inverses (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2), on pourrait appliquer directement, à chacun d'eux, la méthode d'étude du § 23, comme nous l'avons fait au groupe (A, B, C). Puis, après trois études partielles, et en quelque sorte indépendantes, on chercherait les relations qui existent entre les trois groupes, et qui sont d'une grande importance dans la théorie que nous développons, car ce sont ces relations mêmes qui recèlent toute la seconde classe de propriétés ci-dessus annoncée. Cette marche serait la plus naturelle et la plus lucide; elle aurait incontestablement l'avantage de n'établir aucune différence de rang, aucun privilége, aucun droit d'aînesse entre trois groupes dont l'importance est parfaitement égale. Mais cette marche serait beaucoup trop longue, comparée à celle que nous adoptons, et qui consiste à poser, dès l'abord, et en quelque sorte synthétiquement, une partie des relations à découvrir, afin de déduire, par le procédé du § 32, les deux groupes (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2) du groupe (A, B, C) déjà traité. Contentons-nous de dire, pour rétablir l'égalité troublée, que nous eussions pu commencer par traiter directement tout autre des trois groupes.

Il importe de remarquer que les fonctions (A, B, C), étudiées dans cette leçon, se modifient singulièrement quand le rapport k approche de l'une ou de l'autre de ses limites, zéro et l'unité. Nous verrons qu'à la limite de $k = 0$, les fractions $\frac{A(\varepsilon)}{k}$, $\frac{B(\varepsilon)}{k}$ sont exactement $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$, tandis que $C(\varepsilon)$ devient constant et égal à l'unité; ce qui justifie les analogies signalées et les dénominations employées dans les derniers paragraphes, où l'on suppose que k ait une valeur moyenne. Mais, à l'autre limite, à celle de $k = 1$, les fonctions (A, B, C) semblent changer brusquement de nature, car $A(\varepsilon)$ devient $\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{E(\varepsilon)}$ ou *hypotang* ε, tandis que $B(\varepsilon)$ et $C(\varepsilon)$ sont identiques et égales à $\frac{1}{E(\varepsilon)}$, ou à *hyposéc* ε, § 17. On ne saurait imaginer une métamorphose plus complète.

Cette mutabilité, qui s'étend aux trois groupes, explique les difficultés qu'on rencontre, lorsqu'on cherche à représenter les transcendantes elliptiques et leurs fonctions inverses par des arcs de courbe et des lignes droites, à la manière de la transcendante circulaire et des fonctions trigonométriques. Il faut admettre, en quelque sorte, autant de systèmes représentatifs distincts qu'il existe de valeurs de k; ceux de ces systèmes qui répondent à $k=0$, $k=1$, $k=\frac{1}{2}$, sont connus et sont très-différents. Dans la théorie qui nous occupe, ces difficultés sont écartées : les trois variétés des transcendantes elliptiques de première espèce expriment la température, dans les trois familles de surfaces isothermes du second ordre, lesquelles sont homofocales; et si l'on prend pour unité de longueur la demi-distance focale principale, les fonctions inverses des transcendantes sont les axes mêmes des surfaces isothermes. Cette représentation, à la fois physique et géométrique, est simple, générale et naturelle. En comparaison, toute autre paraît compliquée, partielle ou factice.

CINQUIÈME LEÇON.

Système conjugué. — Transformations réelles des fonctions (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2) en (A, B, C). — Propriétés et classement des neuf fonctions. — Formules de toutes les transformations réelles. — Généralité de la période réelle. — Anomalies.

---

§ XLVII.

SYSTÈME CONJUGUÉ.

Le système triple de surfaces isothermes défini au § 36 est particularisé par la valeur de la ligne constante b, ou par celle du rapport $k = \frac{b}{c}$. Il existe autant de systèmes semblables que de valeurs du rapport k, comprises entre zéro et l'unité. Mais tous ces systèmes sont conjugués deux à deux; au système correspondant à b et k se trouve conjugué celui dans lequel b est remplacé par $b' = \sqrt{c^2 - b^2}$, $k = \frac{b}{c}$ par $k' = \frac{b'}{c} = \sqrt{1 - k^2}$, et réciproquement k' par k. Dans les transformations qui vont suivre, il sera nécessaire de considérer ce système conjugué en même temps que le premier; nous le désignerons en accentuant les paramètres géométriques et les fonctions inverses qui lui appartiennent.

Par exemple, à la famille des hyperboloïdes isothermes à deux nappes, particulièrement étudiée dans la leçon précédente, appartient le tableau suivant :

$$\varepsilon = c\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}, \quad \varpi = c\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

$$\nu = c\mathrm{A}(\varepsilon), \quad \sqrt{b^2-\nu^2} = c\mathrm{B}(\varepsilon), \quad \sqrt{c^2-\nu^2} = c\mathrm{C}(\varepsilon),$$

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\mathrm{A}^2(\varepsilon)} - \frac{y^2}{\mathrm{B}^2(\varepsilon)} - \frac{z^2}{\mathrm{C}^2(\varepsilon)} - c^2 = 0,$$

$$\frac{b}{c} = k, \quad \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c} = k', \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

$$\mathrm{A}(\varpi-\varepsilon) = \frac{\mathrm{B}(\varepsilon)}{\mathrm{C}(\varepsilon)}, \quad \mathrm{B}(\varpi-\varepsilon) = k'\frac{\mathrm{A}(\varepsilon)}{\mathrm{C}(\varepsilon)}, \quad \mathrm{C}(\varpi-\varepsilon) = \frac{k'}{\mathrm{C}(\varepsilon)},$$

et la famille des hyperboloïdes à deux nappes du système conjugué sera représentée par le nouveau tableau

$$\varepsilon = c\int_0^{\nu'} \frac{d\nu'}{\sqrt{b'^2-\nu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}}, \quad \varpi' = c\int_0^{b'} \frac{d\nu'}{\sqrt{b'^2-\nu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}},$$

$$\nu' = c\mathrm{A}'(\varepsilon), \quad \sqrt{b'^2-\nu'^2} = c\mathrm{B}'(\varepsilon), \quad \sqrt{c^2-\nu'^2} = c\mathrm{C}'(\varepsilon),$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\mathrm{A}'^2(\varepsilon)} - \frac{y^2}{\mathrm{B}'^2(\varepsilon)} - \frac{z^2}{\mathrm{C}'^2(\varepsilon)} - c^2 = 0,$$

$$\frac{b'}{c} = k', \quad \frac{\sqrt{c^2-b'^2}}{c} = k, \quad k'^2 + k^2 = 1,$$

$$\mathrm{A}'(\varpi'-\varepsilon) = \frac{\mathrm{B}'(\varepsilon)}{\mathrm{C}'(\varepsilon)}, \quad \mathrm{B}'(\varpi'-\varepsilon) = k\frac{\mathrm{A}'(\varepsilon)}{\mathrm{C}'(\varepsilon)}, \quad \mathrm{C}'(\varpi'-\varepsilon) = \frac{k}{\mathrm{C}'(\varepsilon)}.$$

Les fonctions inverses A′, B′, C′ ont identiquement les mêmes propriétés que A, B, C; il n'y a d'autre différence que dans la grandeur de la période, qui est 4ϖ pour A, B, 2ϖ pour C, et $4\varpi'$ pour A′, B′, $2\varpi'$ pour C′. Les dernières lignes des deux tableaux précédents reproduisent les formules (13) du § 42, donnant les fonctions inverses du complément de ε, qui est $(\varpi - \varepsilon)$ au premier tableau, et $(\varpi' - \varepsilon)$ au second.

§ XLVIII.

TRANSFORMATION DES (A_1, B_1, C_1) EN (A', B', C').

La famille des hyperboloïdes isothermes à une nappe au paramètre géométrique μ, étant représentée par le tableau

$$\varepsilon = c\int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},\quad \varpi_1 = c\int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}};$$

$$(3)\qquad \mu = cA_1(\varepsilon),\quad \sqrt{\mu^2-b^2} = cB_1(\varepsilon),\quad \sqrt{c^2-\mu^2} = cC_1(\varepsilon),$$

$$\frac{x^2}{A_1^2(\varepsilon)} + \frac{y^2}{B_1^2(\varepsilon)} - \frac{z^2}{C_1^2(\varepsilon)} - c^2 = 0,$$

on obtient les fonctions inverses A_1, B_1, C_1 à l'aide des fonctions A', B', C', du système conjugué, par la transformation suivante. Posant

$$(4)\ \mu = \sqrt{c^2-\nu'^2},\ \text{d'où}\ \sqrt{\mu^2-b^2} = \sqrt{b'^2-\nu'^2},\quad \sqrt{c^2-\mu^2} = \nu',$$

on en deduit d'abord

$$\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2} = \nu'\sqrt{b'^2-\nu'^2},\quad d\mu = -\frac{\nu' d\nu'}{\sqrt{c^2-\nu'^2}},$$

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}} + \frac{d\nu'}{\sqrt{b'^2-\nu'^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0,$$

puis, par l'intégration et par une double détermination de la constante introduite g,

$$(5)\ c\int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}} + c\int_0^{\nu'} \frac{d\nu'}{\sqrt{b'^2-\nu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}} = g = \varpi_1 = \varpi';$$

car, d'après les relations (4) : 1° quand $\mu = c$, ν' est zéro, la seconde intégrale (5) s'évanouit, la première devient ϖ_1, donc $g = \varpi_1$; 2° quand $\mu = b$, ν' est égal à b', la première intégrale (5) s'annule, la seconde devient ϖ', donc $g = \varpi'$. Ainsi les deux intégrales définies ϖ_1 et ϖ' sont égales entre elles, c'est-à-dire que l'on a

$$(5\ bis)\quad \varpi_1 = c\int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}} = c\int_0^b \frac{d\nu'}{\sqrt{b'^2-\nu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}} = \varpi'.$$

D'après cela, la première intégrale (5) étant ε, la seconde sera $(\varpi'-\varepsilon)$, et on aura actuellement

$$\nu' = cA'(\varpi'-\varepsilon),\quad \sqrt{b'^2-\nu'^2} = cB'(\varpi'-\varepsilon),\quad \sqrt{c^2-\nu'^2} = cC'(\varpi'-\varepsilon).$$

Ces valeurs, jointes à la seconde ligne du tableau (3), transforment les relations (4) dans les suivantes:

$$(6)\quad A_1(\varepsilon) = C'(\varpi'-\varepsilon),\quad B_1(\varepsilon) = B'(\varpi'-\varepsilon),\quad C_1(\varepsilon) = A'(\varpi'-\varepsilon),$$

et, d'après les dernières formules du tableau (2), on a aussi

$$(6\ bis)\quad A_1(\varepsilon) = \frac{k}{C'(\varepsilon)},\quad B_1(\varepsilon) = k\frac{A'(\varepsilon)}{C'(\varepsilon)},\quad C_1(\varepsilon) = \frac{B'(\varepsilon)}{C'(\varepsilon)},$$

équations qui expriment directement les fonctions

A_1, B_1, C_1 à l'aide des A', B', C'.

§ XLIX.

TRANSFORMATION DES (A_2, B_2, C_2) EN (A, B, C).

La famille des ellipsoïdes isothermes, au paramètre géométrique ρ, étant représentée par le tableau

$$(7)\quad \begin{gathered} \varepsilon = c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}},\quad \varpi_2 = c\int_c^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}, \\ \rho = cA_2(\varepsilon),\quad \sqrt{\rho^2-b^2} = cB_2(\varepsilon),\quad \sqrt{\rho^2-c^2} = cC_2(\varepsilon), \\ \frac{x^2}{A_2^2(\varepsilon)} + \frac{y^2}{B_2^2(\varepsilon)} + \frac{z^2}{C_2^2(\varepsilon)} - c^2 = 0, \end{gathered}$$

on obtient les fonctions inverses A_2, B_2, C_2 à l'aide des fonctions A, B, C par la transformation suivante : posant

$$(8)\ \rho = \frac{bc}{\nu},\ \text{d'où}\ \sqrt{\rho^2 - b^2} = b\,\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}}{\nu},\ \sqrt{\rho^2 - c^2} = c\,\frac{\sqrt{b^2-\nu^2}}{\nu},$$

on en déduit d'abord

$$\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2} = \frac{bc}{\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2},\quad d\rho = -bc\,\frac{d\nu}{\nu^2},$$

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} + \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0,$$

puis, par l'intégration, et par une double détermination de la constante introduite g,

$$(9)\ c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} + c\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = g = \varpi_2 = \varpi;$$

car, d'après les valeurs (8) : 1° quand $\rho = \infty$, ν est zéro, la seconde intégrale (9) s'évanouit, la première devient ϖ_2, donc $g = \varpi_2$; 2° quand $\rho = c$, ν devient égal à b, la première intégrale (9) s'annule, la seconde devient ϖ, donc $g = \varpi$. Ainsi les deux intégrales définies ϖ_2 et ϖ sont égales entre elles, c'est-à-dire que l'on a

$$(9\,bis)\ \varpi_2 = c\int_c^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = c\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \varpi.$$

D'après cela, la première intégrale (9) étant ε, la seconde sera $(\varpi - \varepsilon)$, et l'on aura actuellement

$$\nu = c\mathrm{A}(\varpi-\varepsilon),\quad \sqrt{b^2-\nu^2} = c\mathrm{B}(\varpi-\varepsilon),\quad \sqrt{c^2-\nu^2} = c\mathrm{C}(\varpi-\varepsilon).$$

Ces valeurs, jointes à la seconde ligne du tableau (7), transforment les relations (8) dans les suivantes :

$$(10)\ \mathrm{A}_2(\varepsilon) = \frac{k}{\mathrm{A}(\varpi-\varepsilon)},\quad \mathrm{B}_2(\varepsilon) = k\,\frac{\mathrm{C}(\varpi-\varepsilon)}{\mathrm{A}(\varpi-\varepsilon)},\quad \mathrm{C}_2(\varepsilon) = \frac{\mathrm{B}(\varpi-\varepsilon)}{\mathrm{A}(\varpi-\varepsilon)},$$

et, d'après les dernières formules du tableau (1), on a aussi

$$(10\ bis)\quad A_2(\varepsilon)=k\frac{C(\varepsilon)}{B(\varepsilon)},\quad B_2(\varepsilon)=\frac{kk'}{B(\varepsilon)},\quad C_2(\varepsilon)=k'\frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)},$$

équations qui expriment directement les fonctions

$$(A_2, B_2, C_2) \text{ en } (A, B, C).$$

§ L.

PROPRIÉTÉS DES $(A_1, B_1, C_1.)$

Les relations (6 *bis*) conduisent aux propriétés et à la définition des fonctions inverses A_1, B_1, C_1, ou des axes de l'hyperboloïde isotherme à une nappe. En effet, si l'on passe des formules du § 42, qui concernent les fonctions A, B, C, à leurs conjuguées en A', B', C', on déduira de ces dernières, et par les relations (6 *bis*), le tableau

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \varepsilon=0, & \varpi', & 2\varpi', & 3\varpi', & 4\varpi', \\ A_1=k, & 1, & k, & 1, & k, \\ B_1=0, & k', & 0, & -k', & 0, \\ C_1=k', & 0, & -k', & 0, & k', \end{array}\right.$$

et les formules

$$(11\ bis)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_1(\pm\varepsilon)=A_1(\varepsilon), & A_1(\varepsilon+2\varpi')=A_1(\varepsilon), \\ B_1(\pm\varepsilon)=\pm B_1(\varepsilon), & B_1(\varepsilon+4\varpi')=B_1(\varepsilon), \\ C_1(\pm\varepsilon)=C_1(\varepsilon), & C_1(\varepsilon+4\varpi')=C_1(\varepsilon). \end{array}\right.$$

D'où l'on déduit les conséquences suivantes : la fonction B_1 est impaire; les fonctions C_1 et A_1 sont paires. Ces trois fonctions sont périodiques; la période étant $4\varpi'$ pour B_1 et C_1, $2\varpi'$ pour A_1. Par leurs variations de signes et de grandeur, les fonctions B_1 et C_1 se conduisent respectivement comme les fonctions A et B, ou A' et B'; B_1 est donc un pseudosinus, C_1 un pseudocosinus. La fonction A_1 qui n'est jamais nulle, et qui oscille entre le minimum k et le maximum 1, est un pseudorayon comme C ou C'; avec cette différence que A_1 arrive à son maximum quand C' atteint son minimum, et réciproquement.

§ LI.

PROPRIÉTÉS DES (A_2, B_2, C_2).

Les relations (10 *bis*) conduisent pareillement aux propriétés et à la définition des fonctions inverses A_2, B_2, C_2, ou des axes de l'ellipsoïde isotherme. A l'aide de ces relations, les formules du § 42 donnent le tableau

$$(12)\quad\left\{\begin{array}{lllll} \varepsilon = 0\ , & \varpi, & 2\varpi, & 3\varpi, & 4\varpi, \\ A_2 = 1\ , & \infty, & -1, & \infty, & 1; \\ B_2 = k'\ , & \infty, & -k', & \infty, & k', \\ C_2 = 0+, & \infty -, & 0+, & \infty -, & 0; \end{array}\right.$$

et les formules

$$(12\,bis)\quad\left\{\begin{array}{ll} A_2(\pm\varepsilon) = A_2(\varepsilon), & A_2(\varepsilon + 4\varpi) = A_2(\varepsilon), \\ B_2(\pm\varepsilon) = B_2(\varepsilon), & B_2(\varepsilon + 4\varpi) = B_2(\varepsilon), \\ C_2(\pm\varepsilon) = \pm C_2(\varepsilon), & C_2(\varepsilon + 2\varpi) = C_2(\varepsilon). \end{array}\right.$$

D'où l'on déduit les conséquences suivantes : la fonction C_2 est impaire; les fonctions A_2 et B_2 sont paires. Ces trois fonctions sont périodiques; la période étant 4ϖ pour A_2 et B_2, 2ϖ pour C_2. Par ses variations de signe et de grandeur, la fonction $C_2(\varepsilon)$ est analogue à tang ε; nous la nommerons une *pseudotangente*. Les fonctions A_2 et B_2 rappellent les propriétés de séc ε; nous les nommerons des *pseudosécantes :* il y a toutefois cette différence, que les limites absolues de A_2 sont toujours l'unité et l'infini, comme pour séc ε, tandis que ces limites sont la constante k' et l'infini pour B_2.

§ LII.

CLASSEMENT DES NEUF FONCTIONS.

En résumé, les neuf fonctions inverses, introduites au § 36, comprennent : deux pseudorayons (C et A_1), deux pseudosinus (A et B_1), deux pseudocosinus (B et C_1), deux pseudosécantes (A_2 et B_2), une pseudotangente (C_2).

Trois de ces fonctions sont impaires (A, B_1, C_2), les six autres sont paires (B, C; C_1, A_1; A_2, B_2). De telle sorte que dans chaque groupe (A_i, B_i, C_i) il n'y a qu'une fonction impaire, les deux autres étant paires.

On remarquera que la fonction impaire, pour chaque famille isotherme, forme le dénominateur du terme qui précède la variation, dans l'équation de cette famille [tableaux (1), (3), (7)].

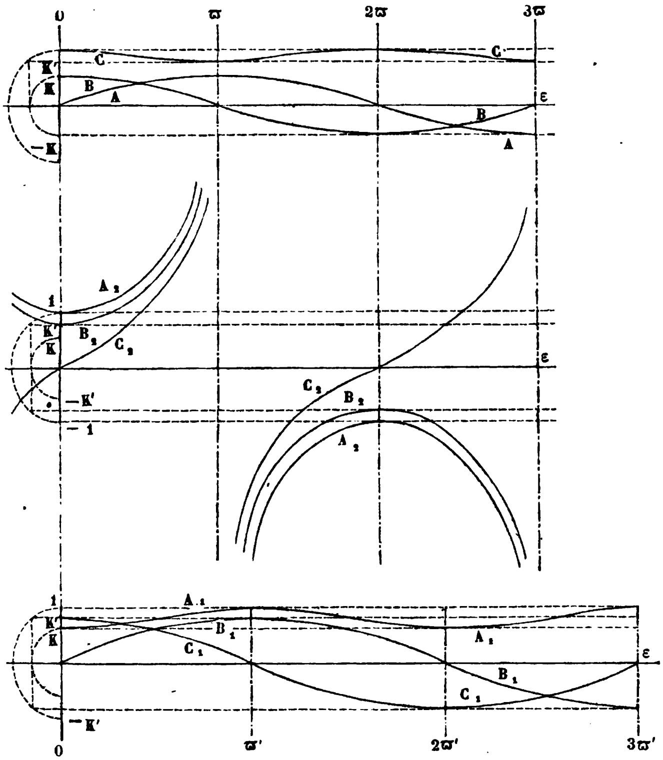
§ LIII.

TRACÉS GRAPHIQUES.

Les figures suivantes représentent les tracés graphiques des courbes ayant pour ordonnées les fonctions A_1, B_1, C_1, et A_2, B_2, C_2, l'abscisse étant toujours le paramètre thermométrique ε. L'inspection de ces figures, et les lettres qui s'y trouvent, nous dispenseront d'en détailler la construction. La première figure reproduit les tracés des courbes A, B, C, afin que l'on puisse mieux saisir leurs rapports avec les courbes A_2, B_2, C_2; la période 4ϖ, et conséquemment la quatrième partie ϖ, qu'on peut appeler *quadrant*, étant les mêmes pour les deux groupes. Les courbes $y = A_2(\varepsilon)$, et $y = B_2(\varepsilon)$, ont la forme de la courbe $y =$ séc ε; l'ordonnée aux sommets est k' pour B_2, 1 pour A_2. La courbe $y = C_2(\varepsilon)$ a la forme de la courbe $y =$ tang ε; mais l'inclinaison de la tangente au point d'inflexion est inférieure à 45 degrés : car

$$\frac{dC_2}{d\varepsilon} = A_2 B_2 \text{ devient } k' \text{ pour } \varepsilon = 0, 2\varpi, 4\varpi.$$

La dernière figure est analogue à la première, les courbes



B_1, C_1, A_1, se substituant respectivement aux courbes A, B, C, mais avec des différences qu'il importe de signaler. Le quadrant est ϖ' pour A_1, B_1, C_1, et ϖ pour A, B, C. Les deux courbes $y = B_1(\varepsilon)$ et $y = C_1(\varepsilon)$ ont la forme sinusoïdale; mais l'inclinaison aux points d'inflexion n'est pas de 45 degrés; elle est moindre pour C_1, moindre encore pour B_1, car

$$\frac{dC_1}{d\varepsilon} = -A_1B_1 \text{ devient } -k' \text{ pour } \varepsilon = \varpi',\ k' \text{ pour } \varepsilon = 3\varpi',$$

$$\frac{dB_1}{d\varepsilon} = C_1A_1 \text{ devient } kk' \text{ pour } \varepsilon = 0,\ -kk' \text{ pour } \varepsilon = 2\varpi',$$

de sorte que si l'on fait subir à l'une des deux courbes, B_1 et C_1, une translation d'un quadrant, parallèlement aux abscisses, les deux courbes ne se superposeront pas : les sommets et les points d'inflexion se confondront, mais en tout autre lieu les deux courbes resteront séparées; la courbe B_1, ou le pseudosinus, étant toujours plus rapprochée de l'axe des abscisses que la courbe C_1, ou le pseudocosinus. L'inverse a lieu pour les courbes A et B, car, après la translation d'un quadrant, le pseudosinus A est toujours plus éloigné de l'axe que le pseudocosinus B. Il est à remarquer que l'inclinaison à l'inflexion est la même pour les deux courbes B et B_1; la tangente trigonométrique de cette inclinaison commune étant kk' en valeur absolue.

La courbe $y = A_1(\varepsilon)$ est analogue à la courbe C, mais elle commence par son minimum, tandis que C part de son maximum. C'est la seule différence essentielle; car, d'après les différentielles (6) du § 37,

$$\frac{dA_1}{d\varepsilon} = B_1C_1, \quad \frac{d^2A_1}{d\varepsilon^2} = A_1(C_1^2 - B_1^2),$$

et l'on a, aux points d'inflexion de la courbe A_1,

$$C_1^2 = B_1^2 = \frac{k'^2}{2},$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{1+k^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-k}{2}\right)^2} > \frac{1+k}{2},$$

$$\frac{dA_1}{d\varepsilon} = \pm\frac{k'^2}{2},$$

ce qui montre, comme au § 45, que la droite parallèle aux abscisses menée par ces points partage la courbe inégalement, les parties supérieures étant aussi plus courtes que les parties inférieures.

§ LIV.

FORMULES DE TOUTES LES TRANSFORMATIONS RÉELLES.

Après avoir étudié particulièrement le groupe des fonctions inverses (A, B, C), ou (A', B', C'), nous avons déduit de cette première étude les propriétés des deux autres groupes (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2), à l'aide des relations (6 *bis*) et (10 *bis*) que l'on peut écrire ainsi :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1 = \dfrac{k}{C'}, & B_1 = k\,\dfrac{A'}{C'}, & C_1 = \dfrac{B'}{C'}, \\[2ex] A_2 = k\,\dfrac{C}{B}, & B_2 = \dfrac{kk'}{B}, & C_2 = k'\,\dfrac{A}{B}, \\[2ex] A'_1 = \dfrac{k'}{C}, & B'_1 = k'\,\dfrac{A}{C}, & C'_1 = \dfrac{B}{C}, \\[2ex] A'_2 = k'\dfrac{C'}{B'}, & B'_2 = \dfrac{kk'}{B'}, & C'_2 = k\,\dfrac{A'}{B'}, \end{array}\right.$$

sans indication de la variable ε, qui est la même pour toutes ces fonctions, et en y joignant leurs conjugées, c'est-à-dire celles qu'on en déduit par le changement de k en k'.

Or, des éliminations faciles donneront les nouvelles relations :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_2 = \dfrac{k}{C'_1}, & B_2 = k\dfrac{A'_1}{C'_1}, & C_2 = \dfrac{B'_1}{C'_1}, \\[2ex] A = \dfrac{B'_1}{A'_1}, & B = k'\dfrac{C'_1}{A'_1}, & C = \dfrac{k'}{A'_1}, \\[2ex] A'_2 = \dfrac{k'}{C_1}, & B'_2 = k'\dfrac{A_1}{C_1}, & C'_2 = \dfrac{B_1}{C_1}, \\[2ex] A' = \dfrac{B_1}{A_1}, & B' = k\dfrac{C_1}{A_1}, & C' = \dfrac{k}{A_1}, \end{array}\right.$$

qui expriment les groupes (A_2, B_2, C_2) et (A, B, C), à l'aide du groupe (A_1, B_1, C_1); et encore celles-ci

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lll} A = k\,\dfrac{C_2}{B_2}, & B = \dfrac{kk'}{B_2}, & C = k'\,\dfrac{A_2}{B_2}, \\ A_1 = \dfrac{B'_2}{A'_2}, & B_1 = k'\,\dfrac{C'_2}{A'_2}, & C_1 = \dfrac{k'}{A'_2}, \\ A' = k'\,\dfrac{C'_2}{B'_2}, & B' = \dfrac{kk'}{B'_2}, & C' = k\,\dfrac{A'_2}{B'_2}, \\ A'_1 = \dfrac{B_2}{A_2}, & B'_1 = k\,\dfrac{C_2}{A_2}, & C'_1 = \dfrac{k}{A_2}, \end{array}\right.$$

qui expriment les groupes (A, B, C) et (A_1, B_1, C_1), à l'aide du groupe (A_2, B_2, C_2).

Les trois groupes de fonctions inverses sont donc tellement liés, que de l'un quelconque d'entre eux on peut déduire les deux autres. Les formules d'Euler, exprimées en (A, B, C) au § 41, donneront facilement les formules analogues en (A_1, B_1, C_1) et en (A_2, B_2, C_2) : s'il s'agit d'obtenir $A_1(\alpha \pm \beta)$, $B_1(\alpha \pm \beta)$, $C_1(\alpha \pm \beta)$, on transformera d'abord les formules primitives en (A', B', C') par le changement de k en k', puis on y substituera les (A', B', C') en (A_1, B_1, C_1) à l'aide des dernières relations (14); s'il s'agit d'obtenir $A_2(\alpha \pm \beta)$, $B_2(\alpha \pm \beta)$, $C_2(\alpha \pm \beta)$, il suffira de substituer dans les formules primitives les (A, B, C) en (A_2, B_2, C_2), à l'aide des premières relations (15); et, par des calculs faciles, on isolera les nouvelles inconnues.

§ LV.

GÉNÉRALITÉ DE LA PÉRIODE RÉELLE.

Les relations (13), (14) et (15) réunissent toutes les transformations réelles qui peuvent faire passer d'un des trois groupes (A_i, B_i, C_i) à un autre. Les §§ 48 et 49 indiquent de quelle manière s'effectuent ces transformations. Cette liaison générale montre que toute propriété d'un des trois groupes a sa propriété correspondante dans chacun des deux autres. C'est ainsi que la périodicité réelle, signalée primitivement dans le groupe (A, B, C), se retrouve dans les deux autres, avec la seule différence du changement de ϖ en ϖ', quand il s'agit de (A_1, B_1, C_1).

On remarquera que pour les neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i), et pour les neuf fonctions conjuguées (A'_i, B'_i, C'_i), les périodes sont égales à deux ou à quatre fois ϖ ou ϖ'; c'est-à-dire que la connaissance des périodes réelles, appartenant à ces dix-huit fonctions, n'exige pas d'autres déterminations numériques que celles des intégrales définies ϖ et ϖ'. Ces deux nombres dépendent d'ailleurs du rapport k, et changent avec lui.

§ LVI.

ANOMALIES AUX LIMITES DE k.

Lorsque k est égal à zéro ou à l'unité, le système des dix-huit fonctions doit se réduire à celui des huit fonctions inverses distinctes appartenant aux surfaces de révolution isothermes du second ordre, et qui sont, comme nous l'avons vu, séc ε, tang ε, coséc ε, cotang ε, et H séc ε, H tang ε, H coséc ε, H cotang ε. A cette limite, la périodicité n'existe plus que pour quatre des huit fonctions, et leurs périodes ne dépendent que d'un seul nombre qui est π. Pour les quatre autres, la périodicité a disparu, ou bien leurs périodes réelles sont infinies. Mais nous savons que ces dernières ont des périodes imaginaires, et ce nouveau genre de périodicité ne peut être que la trace, subsistant, à la même limite, d'une propriété générale appartenant au système des dix-huit fonctions; propriété nouvelle qu'il importe de rechercher et d'étudier.

Après avoir trouvé en quoi consiste cette propriété, nous aurons à examiner de plus près la transformation, en apparence si subite et si discontinue, d'un système général de dix-huit fonctions inverses, qui se réduisent à huit seulement. On conçoit, en effet, qu'en suivant une quelconque des dix-huit fonctions du système général, dans tous les états de grandeur que fait naître la variabilité du rapport k, on doit trouver ce qu'elle devient, ou quelle place elle occupe, lorsque k est égal à zéro ou à l'unité. C'est là ce que nous chercherons.

SIXIÈME LEÇON.

Transformations imaginaires des fonctions inverses.—Périodes imaginaires. — Double périodicité.— Transformations complémentaires.— Valeurs qui annulent et rendent infinies les fonctions inverses. — Multiplication des transcendantes. — Découverte d'Abel.

§ LVII.

DÉFINITION ET EXEMPLE.

Les neuf fonctions (A_i, B_i, C_i), jointes à leurs conjuguées $(A'_i\ B'_i\ C'_i)$, forment six groupes, contenant chacun trois fonctions inverses d'une même famille de surfaces isothermes. Nous avons vu comment, à l'aide d'une transformation réelle, on pouvait passer d'un des six groupes à un autre, convenablement choisi. Il s'agit maintenant de rechercher si le même genre de passage peut aussi s'opérer à l'aide d'une transformation imaginaire. Un exemple, pris dans le système des surfaces isothermes de révolution, définira ce nouveau procédé.

On sait que les fonctions inverses appartenant aux hyperboloïdes de révolution à une nappe sont

$$\frac{1}{E(\varepsilon)}, \quad \frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{E(\varepsilon)}, \quad \text{ou} \quad \text{H séc}\,\varepsilon, \ \text{H tang}\,\varepsilon.$$

Or si l'on change, dans ces fonctions, ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$, on a identiquement

$$\frac{1}{E(\varepsilon\sqrt{-1})} = \frac{1}{\cos\varepsilon}, \quad \frac{\mathcal{E}(\varepsilon\sqrt{-1})}{E(\varepsilon\sqrt{-1})} = \sqrt{-1}\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon},$$

ou

$$\text{H séc}(\varepsilon\sqrt{-1}) = \text{séc}\,\varepsilon, \ \text{H tang}(\varepsilon\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\text{tang}\,\varepsilon;$$

et séc ε, tang ε, sont les fonctions inverses des ellipsoïdes planétaires, auxquelles on est ainsi passé, à l'aide d'une transformation imaginaire.

§ LVIII.

MÉTHODE DE RECHERCHE.

On observera que, dans cet exemple, la fonction paire H séc $(\varepsilon\sqrt{-1})$ a produit directement la fonction paire séc ε, et que la fonction impaire H tang $(\varepsilon\sqrt{-1})$ n'a donné la fonction impaire tang ε qu'avec $\sqrt{-1}$ pour coefficient. Cette remarque, toute simple qu'elle soit, est la clef, ou le point de départ de la recherche qu'il s'agit de faire. En effet, s'il est possible de passer d'un des six groupes du système général à un second, par le changement de ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$, la fonction impaire du premier groupe doit donner la fraction impaire du second, avec $\sqrt{-1}$ pour coefficient; c'est-à-dire que si F et G sont ces deux fonctions impaires, on devra avoir

$$F(\varepsilon\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, G(\varepsilon). \tag{1}$$

Il est d'abord évident que, F étant une fonction impaire quelconque, le résultat du changement de sa variable ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$ donnera toujours le produit de $\sqrt{-1}$ par une fonction impaire G de ε; mais pour que, F étant une fonction inverse, G en soit une autre, il faut certainement une condition. C'est cette condition qu'il faut trouver.

§ LIX.

CONDITION D'UNE TRANSFORMATION IMAGINAIRE.

Rappelons la liaison d'une fonction inverse impaire avec sa variable. Les équations (6) du § 37 donnent, pour les fonctions impaires A, B_1, C_2,

$$d\varepsilon = \frac{dA}{BC} = \frac{dB_1}{C_1 A_1} = \frac{dC_2}{A_2 B_2}.$$

Si, à l'aide des relations (5) du même paragraphe, on substitue les valeurs de B et C en A, de C_1 et A_1 en B_1, de A_2 et B_2 en C_2, les fractions

$$(2)\quad \frac{dA}{\sqrt{k^2 - A^2}\sqrt{1 - A^2}},\ \frac{dB_1}{\sqrt{k'^2 - B_1^2}\sqrt{k^2 + B_1^2}},\ \frac{dC_2}{\sqrt{k'^2 + C_2^2}\sqrt{1 + C_2^2}},$$

seront respectivement les différentielles des variables dont A, B_1, C_2 sont les fonctions inverses; et les fractions

$$(3)\quad \frac{dA'}{\sqrt{k'^2 - A'^2}\sqrt{1 - A'^2}},\ \frac{dB'_1}{\sqrt{k^2 - B'^2_1}\sqrt{k'^2 + B'^2_1}},\ \frac{dC'_1}{\sqrt{k^2 + C'^2_2}\sqrt{1 + C'^2_2}},$$

exprimeront respectivement les différentielles des variables ayant A', B'_1, C'_2 pour fonctions inverses. Désignons généralement les six fractions (2) et (3) par $\frac{d\mathfrak{F}}{\mathfrak{R}(\mathfrak{F}^2)}$, le dénominateur symbolique indiquant le produit de deux radicaux en $\mathfrak{F}^2$, dont la forme diffère avec $\mathfrak{F}$.

Cela posé, F et G étant deux des six fonctions A, B_1, C_2, A', B'_1, C'_2, on a, par hypothèse, l'équation (1), ou simplement $F = G.\sqrt{-1}$. Or, la variable de F étant $\varepsilon\sqrt{-1}$, la différentielle $d.\varepsilon\sqrt{-1}$ de cette variable sera $\frac{dF}{\mathfrak{R}(F^2)}$; la variable de G étant ε, la différentielle $d.\varepsilon$ de cette variable sera $\frac{dG}{\mathfrak{R}(G^2)}$; et, puisque $d.\varepsilon\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\ d.\varepsilon$, on doit donc avoir

$$(4)\qquad \frac{dF}{\mathfrak{R}(F^2)} = \sqrt{-1}\,\frac{dG}{\mathfrak{R}(G^2)}.$$

Telle est la condition nécessaire pour que le changement de ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$ transforme la fonction impaire d'un des six groupes, dans le produit par $\sqrt{-1}$ de la fonction impaire d'un autre groupe.

§ LX.

TRANSFORMATIONS IMAGINAIRES DES (A_i, B_i, C_i).

Il est maintenant facile de reconnaître, à l'inspection des six fractions (2) et (3), quels sont les couples de fonctions impaires qui se prêtent à ce genre de transformation. On a d'abord le couple (A, C'_2), car si dans la fraction

$$\frac{dA}{\sqrt{k^2 - A^2}\sqrt{1 - A^2}}, \quad \text{on pose} \quad A = \sqrt{-1}\, C'_2,$$

elle devient

$$\sqrt{-1}\,\frac{dC'_2}{\sqrt{k^2 + C'^2_2}\sqrt{1 + C'^2_2}},$$

et la condition (4) est vérifiée. On a aussi le couple (B_1, B'_1), car si dans la fraction

$$\frac{dB_1}{\sqrt{k'^2 - B_1^2}\sqrt{k^2 + B_1^2}}, \quad \text{on pose} \quad B = \sqrt{-1}\, B'_1,$$

elle devient

$$\sqrt{-1}\,\frac{dB'_1}{\sqrt{k^2 - B'^2_1}\sqrt{k'^2 + B'^2_1}},$$

et la condition (4) est encore satisfaite.

Le premier couple (A, C'_2) a son réciproque (C'_2, A); ces deux ont leurs conjugués (A', C_2), (C_2, A'); le second couple (B_1, B'_1) a son réciproque (B', B_1) qui est en même temps son conjugué; ce qui donne exclusivement six couples sur lesquels l'épreuve réussit. Il existe donc, pour les six groupes du système général que nous étudions, six transformations imaginaires qui sont respectivement définies par les six formules

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
A\,(\varepsilon\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\;C'_2(\varepsilon),\\
C'_2(\varepsilon\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\;A(\varepsilon),\\
A'(\varepsilon\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\;C_2(\varepsilon),\\
C_2(\varepsilon\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\;A'(\varepsilon),\\
B_1(\varepsilon\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\;B'_1(\varepsilon),\\
B'_1(\varepsilon\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\;B_1(\varepsilon).
\end{aligned}\right.$$

A chacune de ces formules il faut joindre les fonctions paires correspondantes, lesquelles se transforment sans coefficient; on les obtient à l'aide des relations (5) du § 37, ce qui donne le tableau suivant :

$$(5\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}
B\,(\varepsilon\sqrt{-1}) &= B'_2(\varepsilon), & C\,(\varepsilon\sqrt{-1}) &= A'_2(\varepsilon),\\
B'_2(\varepsilon\sqrt{-1}) &= B(\varepsilon), & A'_2(\varepsilon\sqrt{-1}) &= C(\varepsilon),\\
B'(\varepsilon\sqrt{-1}) &= B_2(\varepsilon), & C'(\varepsilon\sqrt{-1}) &= A_2(\varepsilon),\\
B_2(\varepsilon\sqrt{-1}) &= B'(\varepsilon), & A_2(\varepsilon\sqrt{-1}) &= C'(\varepsilon),\\
C_1(\varepsilon\sqrt{-1}) &= A'_1(\varepsilon), & A_1(\varepsilon\sqrt{-1}) &= C'_1(\varepsilon),\\
C'_1(\varepsilon\sqrt{-1}) &= A_1(\varepsilon), & A'_1(\varepsilon\sqrt{-1}) &= C_1(\varepsilon).
\end{aligned}\right.$$

§ LXI.

PÉRIODES IMAGINAIRES. DOUBLE PÉRIODICITÉ.

Ces formules (5) et (5 *bis*) établissent facilement la double périodicité des neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i); car, puisque chacune d'elles a une période réelle, il résulte des liaisons précédentes qu'elle a aussi une période imaginaire. En effet, prenons particulièrement la fonction A_1; on sait déjà qu'elle ne change pas quand on augmente la variable de $2i\varpi'$, i étant un nombre entier quelconque; mais dans la formule $C'(\varepsilon\sqrt{-1}) = A_1(\varepsilon)$, prise au tableau (5 *bis*), le premier membre ne changera pas non plus, quand on remplacera sa variable $\varepsilon\sqrt{-1}$ par $\varepsilon\sqrt{-1} - 4j\varpi$, j étant encore un entier quelconque, ou par $(\varepsilon + 4j\varpi\sqrt{-1})\sqrt{-1}$, c'est-à-dire quand on ajoutera $4j\varpi\sqrt{-1}$ à ε; le second membre $A_1(\varepsilon)$ de la même formule devant jouir de la même propriété, il s'ensuit que la fonction A_1 ne change pas quand on ajoute $4j\varpi\sqrt{-1}$ à sa variable. On a donc, en réunissant les deux additions périodiques,

$$A_1(\varepsilon + 2i\varpi' + 4j\varpi\sqrt{-1}) = A_1(\varepsilon).$$

Les autres fonctions inverses, considérées successivement, en ayant égard aux différences des périodes réelles, signalées aux §§ 43, 50, 51, conduisent à des conséquences analogues, et l'on a le tableau

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&A\,(\varepsilon + 4i\varpi + 2j\varpi'\sqrt{-1}) = A(\varepsilon),\\
&B\,(\varepsilon + 4i\varpi + 4j\varpi'\sqrt{-1}) = B(\varepsilon),\\
&C\,(\varepsilon + 2i\varpi + 4j\varpi'\sqrt{-1}) = C(\varepsilon);\\[4pt]
&A_1(\varepsilon + 2i\varpi' + 4j\varpi\sqrt{-1}) = A_1(\varepsilon),\\
&B_1(\varepsilon + 4i\varpi' + 4j\varpi\sqrt{-1}) = B_1(\varepsilon),\\
&C_1(\varepsilon + 4i\varpi' + 2j\varpi\sqrt{-1}) = C_1(\varepsilon);\\[4pt]
&A_2(\varepsilon + 4i\varpi + 2j\varpi'\sqrt{-1}) = A_2(\varepsilon),\\
&B_2(\varepsilon + 4i\varpi + 4j\varpi'\sqrt{-1}) = B_2(\varepsilon),\\
&C_2(\varepsilon + 2i\varpi + 4j\varpi'\sqrt{-1}) = C_2(\varepsilon);
\end{aligned}\right.$$

qui résume à la fois la double périodicité des neuf fonctions (A_i, B_i, C_i) et les variations que subissent leurs périodes, quand on passe d'une fonction à une autre. On aura un tableau semblable pour les fonctions conjuguées (A'_i, B'_i, C'_i), en changeant ϖ en ϖ', et réciproquement. En résumé, les dix-huit fonctions du système général ont chacune une période réelle et une période imaginaire; et toutes les périodes ne dépendent que des nombres ϖ et ϖ'.

§ LXII.

TRANSFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES.

L'introduction de certains compléments, différents d'un groupe à l'autre, conduit à d'autres formules de transformation qu'il importe de connaître. Rappelons les équations (6) du § 48, qui donnent en y joignant leurs conjuguées,

$$(7)\ \begin{cases} A_1(\varepsilon)=C'(\varpi'-\varepsilon), & B_1(\varepsilon)=B'(\varpi'-\varepsilon), & C_1(\varepsilon)=A'(\varpi'-\varepsilon), \\ A'_1(\varepsilon)=C(\varpi-\varepsilon), & B'_1(\varepsilon)=B(\varpi-\varepsilon), & C'_1(\varepsilon)=A(\varpi-\varepsilon). \end{cases}$$

Dans la dernière de ces formules, changeons ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$, $A(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})$ sera égal à $C'_1(\varepsilon\sqrt{-1})$, qui, d'après le tableau (5), est égal à $A_1(\varepsilon)$; en outre, on peut écrire $A(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})$ sous la forme

$$A\left[-\sqrt{-1}\,(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1})\right],$$

ou, A étant une fonction impaire, sous celle-ci

$$-A\left[(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1})\sqrt{-1}\right],$$

et, d'après le tableau (5), cette dernière expression est égale à $\frac{1}{\sqrt{-1}}C'_2(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1})$. On a ainsi la première ligne du groupe suivant :

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&A(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})=C'_1(\varepsilon\sqrt{-1})=A_1(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{-1}}C'_2(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1}),\\
&B(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})=B'_1(\varepsilon\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,B_1(\varepsilon)=B'_2(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1}),\\
&C(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})=A'_1(\varepsilon\sqrt{-1})=C_1(\varepsilon)=A'_2(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

les autres lignes résultant des mêmes transformations et de rapprochements semblables.

Le groupe (8) conduit au tableau que voici :

$$
(9)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&A(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})=A_1(\varepsilon),\\
&B(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,B_2(\varepsilon),\\
&C(\varpi-\varepsilon\sqrt{-1})=C_1(\varepsilon);\\[4pt]
&A_2(\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)=A_1(\varepsilon\sqrt{-1}),\\
&B_2(\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)=-B_1(\varepsilon\sqrt{-1}),\\
&C_2(\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)=\sqrt{-1}\,C_1(\varepsilon\sqrt{-1});\\[4pt]
&A_2(\varpi+\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)=A(\varepsilon),\\
&B_2(\varpi+\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)=\sqrt{-1}\,B(\varepsilon),\\
&C_2(\varpi+\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)=\sqrt{-1}\,C(\varepsilon).
\end{aligned}
\right.
$$

La première case était écrite. Pour la seconde, on remplace l'équation $A'_2(\varepsilon+\varpi\sqrt{-1})=A'_1(\varepsilon\sqrt{-1})$, incluse au groupe (8), par sa conjuguée $A_2(\varpi'\sqrt{-1}+\varepsilon)=A_1(\varepsilon\sqrt{-1})$, puis on change le signe de ε; et les autres formules de la même case s'obtiennent de la même manière. La troisième case se déduit des deux autres : car si, dans la première formule de la seconde case, on change ε en $\varepsilon-\varpi$, $A_2(\varpi+\varpi'\sqrt{-1}-\varepsilon)$ sera égal à $A_1[(\varepsilon-\varpi)\sqrt{-1}]$, qui, d'après la première case, est égal à $A\{\varpi-\sqrt{-1}[(\varepsilon-\varpi)\sqrt{-1}]\}$, ou à $A(\varepsilon)$; et les deux autres formules résultent de la même opération.

A l'aide des tableaux (6) et (9), aussi importants l'un que l'autre, on détermine toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable, qui rendent une quelconque des neuf fonctions (A_i, B_i, C_i), ou nulle, ou infinie.

§ LXIII.

VALEURS ANNULANT LES FONCTIONS INVERSES.

Dans le premier cas, on sait déjà que

$$A(0)=0,\quad B(\varpi)=0;\quad B_1(0)=0,\quad C_1(\varpi')=0;\quad C_2(0)=0.$$

Pour la fonction C, la dernière formule du tableau (9) a son premier membre nul quand $\varepsilon=\varpi+\varpi'\sqrt{-1}$, il doit en être de même du second; donc $C(\varpi+\varpi'\sqrt{-1})=0$. Pour la fonction A_1, la première formule du même tableau (9) a son premier membre nul quand $\varepsilon=\frac{\varpi}{\sqrt{-1}}=-\varpi\sqrt{-1}$, il doit en être de même du second; donc $A_1(\varpi\sqrt{-1})=0$. Pour la fonction B_2, le second membre de la seconde formule de la deuxième case du tableau (9) étant nul pour $\varepsilon=0$, il doit en être de même du premier membre; donc $B_2(\varpi'\sqrt{-1})=0$. Enfin, pour la fonction A_2, le second membre de la première formule de la même case étant nul quand $\varepsilon=-\varpi$, le premier donne $A_2(\varpi+\varpi'\sqrt{-1})=0$.

Si, à ces valeurs particulières, on ajoute les multiples indéterminés des deux périodes qui appartiennent à chaque fonction, d'après le tableau (6), on aura

$$
(10)\quad\left\{
\begin{aligned}
&A\,(4i\varpi + 2j\varpi'\sqrt{-1}) = 0,\\
&B\,[(4i+1)\varpi + 4j\varpi'\sqrt{-1}] = 0,\\
&C\,[(2i+1)\varpi + (4j+1)\varpi'\sqrt{-1}] = 0;\\
&A_1\,[2i\varpi' + (4j+1)\varpi\sqrt{-1}] = 0,\\
&B_1\,(4i\varpi' + 4j\varpi\sqrt{-1}) = 0,\\
&C_1\,[(4i+1)\varpi' + 2j\varpi\sqrt{-1}] = 0;\\
&A_2\,[(4i+1)\varpi + (2j+1)\varpi']\sqrt{-1} = 0,\\
&B_2\,[4i\varpi + (4j+1)\varpi'\sqrt{-1}] = 0,\\
&C_2\,(2i\varpi + 4j\varpi'\sqrt{-1}) = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

quels que soient les entiers i et j. Et, par l'indétermination de ces deux nombres, les parenthèses du tableau (10) représentent toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable, qui rendent nulles les fonctions (A_i, B_i, C_i).

§ LXIV.

VALEURS RENDANT INFINIES LES FONCTIONS INVERSES.

Dans le second cas, on sait déjà que les fonctions A_2, B_2, C_2 sont infinies, quand leur variable est égale à ϖ. En conséquence, et d'après la troisième case (9), les fonctions A, B, C seront infinies, quand leur variable sera égale à $\varpi'\sqrt{-1}$; et, d'après la deuxième case, il en sera de même des fonctions A_1, B_1, C_1, quand leur variable sera égale à $\varpi' + \varpi\sqrt{-1}$ (car $-\varepsilon\sqrt{-1} = \varpi' + \varpi\sqrt{-1}$ donne $\varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon = \varpi$).

Si l'on substitue respectivement ces valeurs particulières de ε, dans les formules du tableau (6), il donnera le suivant :

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
&A\left[4i\varpi+(2j+1)\varpi'\sqrt{-1}\right]=\infty,\\
&B\left[4i\varpi+(4j+1)\varpi'\sqrt{-1}\right]=\infty,\\
&C\left[2i\varpi+(4j+1)\varpi'\sqrt{-1}\right]=\infty;\\[4pt]
&A_1\left[(2i+1)\varpi'+(4j+1)\varpi\sqrt{-1}\right]=\infty,\\
&B_1\left[(4i+1)\varpi'+(4j+1)\varpi\sqrt{-1}\right]=\infty,\\
&C_1\left[(4i+1)\varpi'+(2j+1)\varpi\sqrt{-1}\right]=\infty;\\[4pt]
&A_2\left[(4i+1)\varpi+2j\varpi'\sqrt{-1}\right]=\infty,\\
&B_2\left[(4i+1)\varpi+4j\varpi'\sqrt{-1}\right]=\infty,\\
&C_2\left[(2i+1)\varpi+4j\varpi'\sqrt{-1}\right]=\infty.
\end{aligned}\right.$$

Et, par l'indétermination des deux nombres entiers i et j, les parenthèses de ce tableau (11) représentent toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable, qui rendent infinies les fonctions (A_i, B_i, C_i).

§ LXV.

MULTIPLICATION DES TRANSCENDANTES.

Désignons par F une quelconque des neuf fonctions inverses, et représentons les formules qui la concernent aux tableaux (10) et (11) par les suivantes :

$$(12)\quad F(Ir+I'\rho\sqrt{-1})=0,\quad F(Jr+J'\rho\sqrt{-1})=\infty;$$

r étant égal à ϖ, ρ à ϖ', si F appartient à l'un des groupes (A, B, C) ou (A_2, B_2, C_2); et inversement, r étant égal à ϖ', ρ à ϖ, si F appartient au groupe (A_1, B_1, C_1); les quatre nombres entiers I, I', J, J', ayant chacun, suivant le cas, l'une des quatre formes $2p$, $2p+1$, $4p$, $4p+1$.

Il s'agit de résoudre le problème suivant : ayant posé

$$F(\varepsilon) = x, \quad F(n\varepsilon) = X,$$

où n est un nombre entier, on se propose de déterminer X en fonction de x. Il résulte des formules (12) que, pour toutes les valeurs de x comprises dans l'équation

$$(13) \qquad x = F\left(\frac{Ir + I'\rho\sqrt{-1}}{n}\right),$$

X sera nul ; et qu'il sera infini pour toutes les valeurs de x que comprend l'équation

$$(14) \qquad x = F\left(\frac{Jr + J'\rho\sqrt{-1}}{n}\right).$$

D'après le tableau (6), le nombre des valeurs distinctes de x, données par chacune des équations (13) et (14), en y faisant varier les entiers I, I', J', J, est *limité ;* il ne saurait surpasser n^2.

On peut conclure de là que X s'exprimera en x, par une fraction, dont le numérateur sera le produit de tous les facteurs distincts de la forme

$$\left[x - F\left(\frac{Ir + I'\rho\sqrt{-1}}{n}\right)\right],$$

et le dénominateur le produit de tous les facteurs distincts de la forme

$$\left[x - F\left(\frac{Jr + J'\rho\sqrt{-1}}{n}\right)\right];$$

cette fraction étant multipliée par un coefficient constant.

On aura donc, en employant une notation connue,

$$(15) \qquad X = M\,\frac{\Pi\left[x - F\left(\frac{Ir + I'\rho\sqrt{-1}}{n}\right)\right]}{\Pi\left[x - F\left(\frac{Jr + J'\rho\sqrt{-1}}{n}\right)\right]},$$

la constante M pouvant être déterminée, à l'aide d'une valeur particulière de ε, à laquelle correspondent des valeurs connues et convenables de $x = F(\varepsilon)$, et de $X = F(n\varepsilon)$.

§ LXVI.

DÉCOUVERTE D'ABEL.

Telle est la solution générale du problème de la multiplication des transcendantes elliptiques. Telle est aussi la véritable découverte d'Abel, comprenant à la fois la double périodicité, ou le tableau (6), les tableaux (10) et (11), ou les séries des valeurs de la variable qui annulent et rendent infinies les fonctions étudiées ; enfin, la formule (15), qui était le but principal. Restreindre cette découverte à sa première partie, comme on le fait souvent, c'est méconnaître son importance et sa grandeur.

En effet, la véritable question que se proposait Abel, c'était le problème de la multiplication des transcendantes elliptiques, dans toute sa généralité. Les cas particuliers qu'on en connaissait, indiquaient la forme algébrique et fractionnaire de la solution. Il s'agissait donc de composer le numérateur et le dénominateur de cette fraction. Pour cela, il fallait chercher et trouver les séries des valeurs de la transcendante, annulant et rendant infinies les fonctions inverses. Et pour obtenir ces séries complètes, il était indispensable d'établir la double périodicité. Telle a été la marche analytique de la découverte dont il s'agit.

Les formules établies dans cette leçon ont prouvé, de la manière la plus directe, que les fonctions (A_i, B_i, C_i) sont doublement périodiques, et peuvent toutes servir à résoudre le problème de la multiplication des transcendantes. Les mêmes formules signalent en outre plusieurs différences caractéristiques entre les neuf fonctions inverses. Voici les principales.

Si l'on appelle collectivement *quadrant* les nombres ϖ, ϖ', $\varpi\sqrt{-1}$, $\varpi'\sqrt{-1}$, on peut dire que le tableau (6) emploie deux sortes de périodes, les unes à deux quadrants, les autres à quatre. On remarque alors que, pour tout B_i, la période réelle et la période imaginaire sont à quatre quadrants, tandis que, pour chaque A_i ou C_i, l'une des périodes est à deux quadrants, l'autre à quatre.

Abstraction faite des indices et de l'accent, les transformations imaginaires des tableaux (5) et (5 *bis*) changent les A en C et réciproquement les C en A, tandis que les B sont *conservés*. Cette loi s'observe aussi pour les transformations complémentaires réelles (7). A ce groupe de transformations *réciproques*, on peut opposer celui des transformations complémentaires imaginaires du tableau (9), lesquelles sont *directes*, car dans toutes les A, B, C sont conservés; ce qui devait être, puisqu'on obtient chacune des formules (9) à l'aide de deux transformations réciproques, faites successivement, comme l'indique le tableau (8).

SEPTIÈME LEÇON.

Formules d'Euler exprimées en (A, B, C), en (A_1, B_1, C_1), en (A_2, B_2, C_2). — Formule unique qui les comprend toutes. — Caractère général des fonctions inverses (A_i, B_i, C_i). — Compléments naturels de la variable. — Formules des fonctions complémentaires.

§ LXVII.

RAPPEL DES FORMULES D'EULER EN (A, B, C).

Les formules d'Euler, exprimées au § 41 à l'aide des fonctions (A, B, C), conduisent à une propriété différentielle, commune aux neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i), et en quelque sorte indépendante du rapport k. Cette propriété pouvant servir à caractériser exclusivement la classe de fonctions dont il s'agit, nous ne croyons pas qu'il soit inutile de la faire connaître.

Les formules du § 41 sont les suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} A(\alpha \pm \beta) = k\,\dfrac{A(\alpha)B(\beta)C(\beta) \pm A(\beta)B(\alpha)C(\alpha)}{k^2 - A^2(\alpha)A^2(\beta)}, \\[2ex] B(\alpha \pm \beta) = k\,\dfrac{B(\alpha)B(\beta) \mp A(\alpha)C(\alpha)A(\beta)C(\beta)}{k^2 - A^2(\alpha)A^2(\beta)}, \\[2ex] C(\alpha \pm \beta) = \dfrac{k^2 C(\alpha)C(\beta) \mp A(\alpha)B(\alpha)A(\beta)B(\beta)}{k^2 - A^2(\alpha)A^2(\beta)}; \end{cases}$$

il s'agit de les exprimer à l'aide des fonctions (A_2, B_2, C_2). Pour cela, rapprochons aussi les formules (10) et (10 *bis*) du § 49, lesquelles sont

$$
(2)\qquad\left\{
\begin{aligned}
A_2(\varepsilon) &= \frac{k}{A(\varpi-\varepsilon)} = k\frac{C(\varepsilon)}{B(\varepsilon)},\\
B_2(\varepsilon) &= k\frac{C(\varpi-\varepsilon)}{A(\varpi-\varepsilon)} = \frac{kk'}{B(\varepsilon)},\\
C_2(\varepsilon) &= \frac{B(\varpi-\varepsilon)}{A(\varpi-\varepsilon)} = k'\frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ne conservant que les deux premiers membres de chacune, on en déduit, par des éliminations faciles,

$$
(3)\quad A(\varpi-\varepsilon) = \frac{k}{A_2(\varepsilon)},\quad B(\varpi-\varepsilon) = k\frac{C_2(\varepsilon)}{A_2(\varepsilon)},\quad C(\varpi-\varepsilon) = \frac{B_2(\varepsilon)}{A_2(\varepsilon)}.
$$

Ne prenant maintenant que les membres extrêmes des formules (2), les mêmes éliminations donnent

$$
(4)\qquad A = k\frac{C_2}{B_2},\quad B = \frac{kk'}{B_2},\quad C = k'\frac{A_2}{B_2},
$$

sans désignation de la variable qui est la même pour les six fonctions. Ces dernières relations étaient écrites : ce sont les premières du groupe (15) au § 53.

§ LXVIII.

LEUR TRANSFORMATION EN $(A_2,\ B_2,\ C_2)$.

Si dans les formules (1) on change α en $\varpi-\alpha$, $\alpha\pm\beta$ deviendra $\varpi-\alpha\pm\beta$, somme que nous désignerons par e. On pourra exprimer : 1° les fonctions (A, B, C) de $\varpi-\alpha$ à l'aide des fonctions (A_2, B_2, C_2) de α par les relations (3) ; 2° les fonctions (A, B, C) de e et de β, à l'aide des fonctions (A_2, B_2, C_2) des mêmes variables par les relations (4) ; et, en supprimant le facteur k commun aux deux membres, la première formule (1) deviendra

$$\frac{C_2(e)}{B_2(e)}=\frac{\frac{k}{A_2(\alpha)}\cdot\frac{kk'^2A_2(\beta)}{B_2^2(\beta)}\pm k\frac{C_2(\beta)}{B_2(\beta)}k\frac{C_2(\alpha)B_2(\alpha)}{A_2^2(\alpha)}}{k^2-\frac{k^2}{A_2^2(\alpha)}\cdot\frac{C_2^2(\beta)}{B_2^2(\beta)}},$$

et l'on aura définitivement

$$\frac{C_2(e)}{B_2(e)}=\frac{k'^2A_2(\alpha)A_2(\beta)\pm B_2(\alpha)C_2(\alpha)B_2(\beta)C_2(\beta)}{A_2^2(\alpha)B_2^2(\beta)-k^2C_2^2(\beta)}, \tag{5}$$

par des calculs de réduction trop simples pour qu'il soit nécessaire de les détailler. Les deux autres formules (1) donneront de la même manière

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{B_2(e)}&=\frac{B_2(\beta)C_2(\alpha)A_2(\alpha)\mp B(\alpha)C_2(\beta)A_2(\beta)}{A_2^2(\alpha)B_2^2(\beta)-k^2C_2^2(\beta)},\\ \frac{A_2(e)}{B_2(e)}&=\frac{A_2(\alpha)B_2(\alpha)A_2(\beta)B_2(\beta)\mp k^2C_2(\alpha)C_2(\beta)}{A_2^2(\alpha)B_2^2(\beta)-k^2C_2^2(\beta)}.\end{aligned}\right.$$

§ LXIX.

SYMÉTRIE DU DÉNOMINATEUR.

Le dénominateur commun des fractions sises aux seconds membres des équations (5) et (6) est, malgré l'apparence contraire, symétrique en α et β. En effet, si l'on extrait du groupe (5), § 37, les deux relations

$$B_2^2=A_2^2-k^2,\quad C_2^2=A_2^2-1, \tag{7}$$

on peut exprimer ce dénominateur en A_2 seulement; il devient alors

$$\{A_2^2(\alpha)[A_2^2(\beta)-k^2]-k^2[A_2^2(\beta)-1]\},$$

ou, en réduisant,

$$\{k^2-k^2[A_2^2(\alpha)+A_2^2(\beta)]+A_2^2(\alpha)A_2^2(\beta)\}, \tag{8}$$

expression symétrique que nous désignerons par D. On arrive encore à cette même expression en réduisant le facteur

$$[k'^2 A_2^2(\alpha) + B_2^2(\alpha) C_2^2(\beta)],$$

ou

$$\{(1 - k^2) A^2(\alpha) + [A_2^2(\alpha) - k^2][A_2^2(\alpha) - 1]\}.$$

D'où il suit que D peut s'écrire sous les quatre formes

$$(9)\quad \begin{array}{l} [A_2^2(\alpha) B_2^2(\beta) - k^2 C_2^2(\beta)], \\ [A_2^2(\beta) B_2^2(\alpha) - k^2 C_2^2(\alpha)], \\ [k'^2 A_2^2(\alpha) + B_2^2(\alpha) C_2^2(\beta)], \\ [k'^2 A_2^2(\beta) + B_2^2(\beta) C_2^2(\alpha)], \end{array}$$

lesquelles sont conséquemment égales entre elles.

§ LXX.

ISOLEMENT DES (A_2, B_2, C_2).

Il faut maintenant isoler les fonctions $A_2(e)$, $B_2(e)$, $C_2(e)$ dans les équations (5) et (6). Cet isolement a déjà lieu pour $B_2(e)$, car il suffit de renverser les fractions dans la première des formules (6); mais afin de ramener le double signe au numérateur, il faudra multiplier les deux termes de la fraction par

$$[B_2(\beta) C_2(\alpha) A_2(\alpha) \pm B_2(\alpha) C_2(\beta) A_2(\beta)];$$

son dénominateur deviendra ainsi

$$[B_2^2(\beta) C_2^2(\alpha) A_2^2(\alpha) - B_2^2(\alpha) C_2^2(\beta) A_2^2(\beta)].$$

Or cette quantité est égale au produit de D par

$$[A_2^2(\alpha) - A_2^2(\beta)];$$

car à l'aide des relations (7) elle devient

$$\{[A_2^4(\alpha) - A_2^2(\alpha)][A_2^2(\beta) - k^2] - [A_2^4(\beta) - A_2^2(\beta)][A_2^2(\alpha) - k^2]\},$$

ou bien, toute réduction faite,

$$[A_2^2(\alpha) - A_2^2(\beta)]\left\{k^2 - k^2[A_2^2(\alpha) + A_2^2(\beta)] + A_2^2(\alpha)A_2^2(\beta)\right\}.$$

De là résulte qu'en supprimant le facteur commun D, on aura définitivement

$$(10) \qquad B_2(e) = \frac{B_2(\beta)C_2(\alpha)A_2(\beta) \pm B_2(\alpha)C_2(\beta)A_2(\beta)}{A_2^2(\alpha) - A_2^2(\beta)}.$$

Si l'on multiplie, par cette équation, la seconde équation (6) et l'équation (5), $A_2(e)$ et $C_2(e)$ sont isolés, et l'on a

$$(11) \quad \left\{\begin{aligned} A_2(e) &= \frac{A_2(\beta)B_2(\alpha)C_2(\alpha) \pm A_2(\alpha)B_2(\beta)C_2(\beta)}{A_2^2(\alpha) - A_2^2(\beta)}, \\ C_2(e) &= \frac{C_2(\alpha)A_2(\beta)B_2(6) \pm C_2(\beta)A_2(\alpha)B_2(\beta)}{A_2^2(\alpha) - A_2^2(\beta)}; \end{aligned}\right.$$

en supprimant encore D, qui est facteur au numérateur de $A_2(e)$ sous les deux premières formes (9), et sous les deux dernières au numérateur de $C_2(e)$. (Devant employer fréquemment le procédé de transformation qui fait l'objet des trois derniers paragraphes, nous avons pensé qu'il était utile de détailler, à peu près complétement, les calculs relatifs à ce premier exemple; nous irons plus vite dans les autres applications du même procédé.)

§ LXXI.

ANALOGIE DES FORMULES EN (A_2, B_2, C_2).

D'après les relations (7), on a

$$[A_2^2(\alpha) - A_2^2(\beta)] = [B_2^2(\alpha) - B_2^2(\beta)] = [C_2^2(\alpha) - C_2^2(\beta)],$$

et l'on peut exprimer le dénominateur de $B_2(e)$ en B_2, celui de $C_2(e)$ en C_2. Par suite de cette modification, les valeurs (10) et (11) ont une analogie de forme remarquable, et qui va se dessiner encore plus.

Pour simplifier, posons généralement

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{A_i(\beta)B_i(\alpha)C_i(\alpha)\mp A_i(\alpha)B_i(\beta)C_i(\beta)}{A_i^2(\alpha)-A_i^2(\beta)}=\mathcal{A}_i,\\
&\frac{B_i(\beta)C_i(\alpha)A_i(\alpha)\mp B_i(\alpha)C_i(\beta)A_i(\beta)}{B_i^2(\alpha)-B_i^2(\beta)}=\mathcal{B}_i,\\
&\frac{C_i(\beta)A_i(\alpha)B_i(\alpha)\mp C_i(\alpha)A_i(\beta)B_i(\beta)}{C_i^2(\alpha)-C_i^2(\beta)}=\Gamma_i;
\end{aligned}\right.$$

Avec cette notation, si l'on intervertit les signes, c'est-à-dire si l'on remplace partout ± 1 par ∓ 1, e devenant $\varpi-\alpha\mp\beta$ ou $\varpi-(\alpha\pm\beta)$, les formules (10) et (11) s'écrivent ainsi :

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A}_2&=A_2[\varpi-(\alpha\pm\beta)],\\
\mathcal{B}_2&=B_1[\varpi-(\alpha\pm\beta)],\\
\Gamma_2&=\mp C_2[\varpi-(\alpha\pm\beta)].
\end{aligned}\right.$$

Or, d'après les relations

$$B_2C_2=\frac{dA_2}{d\varepsilon},\quad C_2A_2=\frac{dB_2}{d\varepsilon},\quad A_2B_2=\frac{dC_2}{d\varepsilon},$$

extraites du groupe (6) au § 37, on a identiquement

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A}_2&=\frac{A_2(\beta)\dfrac{dA_2(\alpha)}{d\alpha}\mp A_2(\alpha)\dfrac{dA_2(\beta)}{d\beta}}{A_2^2(\alpha)-A_2^2(\beta)},\\
\mathcal{B}_2&=\frac{B_2(\beta)\dfrac{dB_2(\alpha)}{d\alpha}\mp B_2(\alpha)\dfrac{dB_2(\beta)}{d\beta}}{B_2^2(\alpha)-B_2^2(\beta)},\\
\Gamma_2&=\frac{C_2(\beta)\dfrac{dC_2(\alpha)}{d\alpha}\mp C_2(\alpha)\dfrac{dC_2(\beta)}{d\beta}}{C_2^2(\alpha)-C_2^2(\beta)},
\end{aligned}\right.$$

et par la substitution de ces valeurs, l'analogie devient telle, que l'on peut réunir les trois formules (13) en une seule, de la manière suivante.

§ LXXII.

FORMULE UNIQUE POUR LES (A_i, B_i, C_i).

Désignant par F une quelconque des trois fonctions (A_2, B_2, C_2), on aura

$$(15)\quad \frac{F(\beta)\dfrac{dF(\alpha)}{d\alpha} \mp F(\alpha)\dfrac{dF(\beta)}{d\beta}}{F^2(\alpha) - F^2(\beta)} = gF[G - (\alpha \pm \beta)];$$

le coefficient g étant l'unité pour A_2 et B_2, et ∓ 1 pour C_2; la constante G étant, dans les trois cas, égale à ϖ, ou à la valeur de la variable qui rend infinies les trois fonctions A_2, B_2, C_2; ce qui devait être, car en prenant les signes inférieurs, et faisant $\beta = \alpha$, l'équation (15) devient $\frac{1}{0}\cdot\frac{d.F^2(\alpha)}{d\alpha} = gF(G)$, ou $F(G) = \infty$.

Il s'agit d'établir que les six autres fonctions (A, B, C) et (A_1, B_1, C_1) vérifient la même équation (15); en donnant au coefficient g des valeurs convenables, et à la constante G la valeur $\varpi'\sqrt{-1}$ qui rend infinies les fonctions (A, B, C), si F est l'une d'elles, et la valeur $\varpi' + \varpi\sqrt{-1}$ qui rend infinies les fonctions (A_1, B_1, C_1), si F appartient à ce groupe.

§ LXXIII.

VÉRIFICATION POUR LES (A, B, C).

Pour les fonctions (A, B, C), ayons recours à la seconde transformation imaginaire des groupes (5) et (5 *bis*) au

§ 60, en y changeant le signe de ε, elle donne

$$(16)\quad \begin{cases} C'_2(-\varepsilon\sqrt{-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}A(\varepsilon), \\ B'_2(-\varepsilon\sqrt{-1}) = B(\varepsilon), \\ A'_2(-\varepsilon\sqrt{-1}) = C(\varepsilon). \end{cases}$$

Prenant les conjuguées des formules (13), remplaçant α par $-\alpha\sqrt{-1}$, β par $-\beta\sqrt{-1}$, et passant des (A'_2, B'_2, C'_2) aux (A, B, C), à l'aide des relations (16), les $\mathcal{A}'_2, \mathcal{B}'_2, \Gamma'_2$ des premiers membres deviennent respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\Gamma, \quad \frac{1}{\sqrt{-1}}\mathcal{B}, \quad -\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathcal{A};$$

aux seconds membres la variable est devenue

$$\varpi + (\alpha \pm \beta)\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad -[\varpi'\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)]\sqrt{-1},$$

et les fonctions (A'_2, B'_2, C'_2) de cette variable sont respectivement égales aux fonctions $C, B, \dfrac{1}{\sqrt{-1}}A$, de la variable $\varpi'\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)$, d'après les relations (16). On a donc définitivement, par toutes ces substitutions, et en renversant l'ordre des équations,

$$(17)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \pm A[\varpi'\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)], \\ \mathcal{B} = \sqrt{-1}\,B[\varpi'\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)], \\ \Gamma = \sqrt{-1}\,C[\varpi'\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)]; \end{cases}$$

or, d'après les relations (6) au § 37,

$$BC = \frac{dA}{d\varepsilon}, \quad CA = -\frac{dB}{d\varepsilon}, \quad AB = -\frac{dC}{d\varepsilon},$$

on a donc identiquement

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{A(\beta)\dfrac{dA(\alpha)}{d\alpha} \mp A(\alpha)\dfrac{dA(\beta)}{d\beta}}{A^2(\alpha)-A^2(\beta)},\\
\mathcal{B} &= -\frac{B(\beta)\dfrac{dB(\alpha)}{d\alpha} \mp B(\alpha)\dfrac{dB(\beta)}{d\beta}}{B^2(\alpha)-B^2(\beta)},\\
\Gamma &= -\frac{C(\beta)\dfrac{dC(\alpha)}{d\alpha} \mp C(\alpha)\dfrac{dC(\beta)}{d\beta}}{C^2(\alpha)-C^2(\beta)};
\end{aligned}\right.$$

et, par ces valeurs, les formules (17) se fondent dans la formule (15); la constante G étant alors $\varpi'\sqrt{-1}$, et le coefficient g étant ± 1 pour A, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ pour B et C.

§ LXXIV.

VÉRIFICATION POUR LES (A_1, B_1, C_1).

Pour les fonctions (A_1, B_1, C_1), rappelons la première case du tableau (9) au § 62; en y changeant le signe de ε, elle donne

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
A(\varpi+\varepsilon\sqrt{-1}) &= A_1(\varepsilon),\\
B(\varpi+\varepsilon\sqrt{-1}) &= \frac{1}{\sqrt{-1}}B_1(\varepsilon),\\
C(\varpi+\varepsilon\sqrt{-1}) &= C_1(\varepsilon).
\end{aligned}\right.$$

N'écrivons les formules (17) qu'avec les signes inférieurs, et conséquemment le second membre de la première avec le signe — seulement. Remplaçons α par $\varpi+\alpha\sqrt{-1}$, β par $\varpi+\beta\sqrt{-1}$, et passant des (A, B, C) aux (A_1, B_1, C_1) à l'aide des relations (19), les $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ des premiers membres deviennent respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathcal{A}_1,\quad -\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathcal{B}_1,\quad \frac{1}{\sqrt{-1}}\Gamma_1.$$

Aux seconds membres la variable est devenue

$$\sqrt{-1}\,[\varpi' + (\alpha-\beta)],\quad \text{ou}\quad \varpi + [\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\alpha-\beta)]\sqrt{-1};$$

et, d'après les relations (19), les fonctions (A, B, C) de cette variable sont respectivement égales aux fonctions $\left(A_1, \frac{1}{\sqrt{-1}}B_1, C_1\right)$ de la variable nouvelle

$$\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\alpha-\beta),$$

que nous désignerons par u. Substituant ces valeurs dans les formules (17), toujours écrites seulement avec les signes inférieurs, on a d'abord

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}A_1(u),\quad \mathcal{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}B_1(u),\quad \Gamma_1 = -C_1(u).$$

Rétablissant maintenant les signes supérieurs, c'est-à-dire mettant $\mp B_1(\beta)$ au lieu de $B_1(\beta)$, seule fonction impaire de β, ce qui exige que l'on multiplie la seconde équation par ∓ 1 pour conserver à $\mathcal{B}_1$ la forme (12); on a définitivement

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{-1}}A_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\alpha\pm\beta)],\\ \mathcal{B}_1 &= \pm\sqrt{-1}\,B_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\alpha\pm\beta)],\\ \Gamma_1 &= -C_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\alpha\pm\beta)]; \end{aligned}\right.$$

or, d'après les relations (6) au § 37,

$$B_1C_1 = \frac{dA_1}{d\varepsilon},\quad C_1A_1 = \frac{dB_1}{d\varepsilon},\quad A_1B_1 = -\frac{dC_1}{d\varepsilon};$$

on a donc identiquement

$$
(21)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \frac{A_1(\beta)\dfrac{dA_1(\alpha)}{d\alpha} \mp A_1(\alpha)\dfrac{dA_1(\beta)}{d\beta}}{A_1^2(\alpha) - A_1^2(\beta)},\\
\mathcal{B}_1 &= \frac{B_1(\beta)\dfrac{dB_1(\alpha)}{d\alpha} \mp B_2(\alpha)\dfrac{dB_1(\beta)}{d\beta}}{B_1^2(\alpha) - B_1^2(\beta)},\\
\Gamma_1 &= -\frac{C_1(\beta)\dfrac{dC_1(\alpha)}{d\alpha} \mp C_1(\alpha)\dfrac{dC_1(\beta)}{d\beta}}{C_1^2(\alpha) - C_1^2(\beta)},
\end{aligned}
\right.
$$

et, par ces valeurs, les formules (20) se fondent encore dans la formule (15); la constante G étant cette fois $\varpi' + \varpi\sqrt{-1}$, et le coefficient g étant $\dfrac{1}{\sqrt{-1}}$ pour A_1, $\pm\sqrt{-1}$ pour B_1, 1 pour C_1.

§ LXXV.

CARACTÈRE GÉNÉRAL DES (A_i, B_i, C_i).

La vérification est maintenant complète. Les neuf fonctions (A_i, B_i, C_i) ont la propriété commune de satisfaire à l'équation différentielle (15), la constante G étant la valeur de la variable qui rend infinie chacune de ces fonctions, et le coefficient g étant ± 1, $\dfrac{1}{\sqrt{-1}}$, $\pm\sqrt{-1}$, 1, ou ∓ 1. Le tableau suivant résume, d'une manière simple et facile à retenir, la correspondance de la fonction, de la constante G, et du coefficient g:

$$
(22)\qquad
\begin{array}{llllllllll}
G: & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\varpi'\sqrt{-1},\qquad}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\varpi' - \varpi\sqrt{-1},\qquad}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\varpi.\qquad}} \\
F: & A, & B, & C; & A_1, & B_1, & C_1; & A_2, & B_2, & C_2. \\
g: & \pm 1, & \dfrac{1}{\sqrt{-1}}, & \dfrac{1}{\sqrt{-1}}; & \dfrac{1}{\sqrt{-1}}, & \pm\sqrt{-1}, & 1; & 1, & 1, & \mp 1.
\end{array}
$$

On voit que les fonctions impaires A, B_1, C_2 sont les seules pour lesquelles le coefficient g est affecté d'un double signe, et que les valeurs ± 1, $\pm\sqrt{-1}$, ∓ 1, correspondantes à ces fonctions, forment une progression géométrique dont la raison est $\sqrt{-1}$; ces doubles valeurs occupent les extrémités et le milieu de la série g; le premier intervalle est composé de trois valeurs simples, égales à $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, la seconde de trois autres égales à l'unité; et il y a encore ici la même raison $\sqrt{-1}$.

§ LXXVI.

SECONDE FORME DU CARACTÈRE GÉNÉRAL.

Autrement: Si l'on désigne par $\mathcal{F}$ la fraction (12) qui correspond à F (c'est-à-dire la fraction dont le dénominateur est $[F^2(\alpha) - F^2(\beta)]$, et qui a pour numérateur deux termes séparés par le double signe $\mp$, le premier étant le produit de $F(\beta)$ par les deux autres fonctions inverses du même groupe avec la variable α, le second étant le produit de $F(\alpha)$ par les mêmes fonctions avec la variable β), les formules (17), (20) et (13) seront toutes comprises dans celle-ci :

$$\mathcal{F} = hF[G - (\alpha \pm \beta)]; \tag{23}$$

la correspondance de la fonction F, de la constante G et du coefficient h, étant résumée au tableau suivant :

$$\begin{array}{lccc} G: & \varpi'\sqrt{-1}; & \varpi' + \varpi\sqrt{-1}; & \varpi \\ F: & \overbrace{A,\quad B,\quad C}; & \overbrace{A_1,\quad B_1,\quad C_1}; & \overbrace{A_2,\ B_2,\ C_2}. \\ h: & \pm 1,\ \sqrt{-1},\ \sqrt{-1}; & -\sqrt{-1},\ \pm\sqrt{-1},\ -1; & 1,\ 1,\ \mp 1. \end{array} \tag{24}$$

La série des h est moins simple que celle des g; elle en diffère en ce que les termes simples du premier intervalle ont pour valeur absolue commune $\sqrt{-1}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, et que les deux termes qui touchent celui du milieu ont le signe —.

§ LXXVII.

COMPLÉMENT NATUREL.

On a ainsi deux modes différents pour caractériser les fonctions elliptiques : l'équation différentielle (15) et le tableau (22), ou la formule (23) et le tableau (24). Ces deux modes ont toute la généralité désirable, car, dans aucun d'eux, le rapport k n'entre explicitement; la constante G dépend seule de ce rapport. En outre, la formule (23) exprime, de la manière la plus simple, le groupe des formules d'Euler, si importantes dans la théorie des transcendantes et des fonctions elliptiques.

Cette généralité et cette simplicité donnent une importance réelle à la constante G, qui joue ici le rôle principal. Cette constante est la valeur de la variable qui rend infinie la fonction inverse; telle est sa définition. Mais la place qu'elle occupe dans les équations (15) et (23) lui donne un nouveau caractère; ε étant la variable ou la transcendante, $(G - \varepsilon)$ est un *complément* en quelque sorte *naturel* de cette variable; et l'on peut dire que la formule (15) ou (23) donne la fonction F du complément de $(\alpha \pm \beta)$, à l'aide des fonctions F de α, et F de β.

§ LXXVIII.

FORMULES COMPLÉMENTAIRES.

Par une analogie facile à deviner, on peut désigner $F(G - \varepsilon)$ par $\text{co}F(\varepsilon)$, et écrire l'équation (23) de cette manière :

$$\mathfrak{F} = h.\text{co}F(\alpha \pm \beta). \tag{23 bis}$$

Si l'on fait $\beta = 0$, on aura la fonction F du complément de α, à l'aide de la fonction F de α, ou coF à l'aide de F; prenant successivement les neuf fonctions $(A_i; B_i, C_i)$, on formera le tableau suivant :

$$(25) \left\{ \begin{array}{lll} \text{co}A = -\dfrac{k}{A}, & \text{co}B = \sqrt{-1}\,k\dfrac{C}{A}, & \text{co}C = \sqrt{-1}\dfrac{B}{A}; \\ \text{co}A_1 = \sqrt{-1}\,k\dfrac{C_1}{B_1}, & \text{co}B_1 = \sqrt{-1}\,\dfrac{kk'}{B_1}, & \text{co}C_1 = k'\dfrac{A_1}{B_1}; \\ \text{co}A_2 = \dfrac{B_2}{C_2}, & \text{co}B_2 = k'\dfrac{A_2}{C_2}, & \text{co}C_2 = \dfrac{k'}{C_2}; \end{array} \right.$$

qui, considéré en lui-même, ou comparé aux groupes des transformations réelles du § 53, donne lieu à une multitude de remarques, que nous passerons sous silence. Répétons, pour prévenir toute méprise, que la constante G a trois valeurs différentes, c'est-à-dire que le complément de ε est ici $(\varpi' \sqrt{-1} - \varepsilon)$ pour les fonctions inverses (A, B, C), $(\varpi' + \varpi \sqrt{-1} - \varepsilon)$ pour (A_1, B_1, C_1), $(\varpi - \varepsilon)$ pour (A_2, B_2, C_2)

§ LXXIX.

TRADUCTION SIMPLE DES FORMULES D'EULER.

Si l'on prend $(\alpha \pm \beta)$ pour variable, au tableau (25), et si l'on multiplie chaque équation par le coefficient h correspondant, on obtient les neuf valeurs de $h.\mathrm{co}\,F(\alpha \pm \beta)$, et l'équation (23) donne les formules spéciales :

$$
(26)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{k}{A(\alpha \pm \beta)} = \mp \mathcal{A}, & k\,\dfrac{C(\alpha \pm \beta)}{A(\alpha \pm \beta)} = -\mathcal{B}, \\[2ex]
k\,\dfrac{C_1(\alpha \pm \beta)}{B_1(\alpha \pm \beta)} = \mathcal{A}_1, & \dfrac{k k'}{B_1(\alpha \pm \beta)} = \mp \mathcal{B}_1, \\[2ex]
\dfrac{B_2(\alpha \pm \beta)}{C_2(\alpha \pm \beta)} = \mathcal{A}_2, & k'\,\dfrac{A_2(\alpha \pm \beta)}{C_2(\alpha \pm \beta)} = \mathcal{B}_2, \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{B(\alpha \pm \beta)}{A(\alpha \pm \beta)} = -\Gamma,} \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{k'\,\dfrac{A_1(\alpha \pm \beta)}{B_1(\alpha \pm \beta)} = -\Gamma_1,} \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{k'}{C_2(\alpha \pm \beta)} = \mp \Gamma_2,}
\end{array}
\right.
$$

où les seconds membres ont la forme générale (12), sans modification pour $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, avec l'échange des signes, au numérateur pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, Γ_2, au dénominateur pour $\mathcal{B}$, Γ, Γ_1. Ces formules sont dégagées d'imaginaires et de compléments; ne contenant le rapport k qu'aux premiers membres, elles traduisent avec simplicité et symétrie les formules d'Euler. Mais les fonctions de $(\alpha \pm \beta)$ n'y sont pas isolées, et toute élimination les complique.

Le caractère général, défini dans cette leçon, persiste aux limites de k; c'est-à-dire que les fonctions inverses des surfaces de révolution isothermes du second ordre vérifient l'équation (15). En effet, F étant successivement l'une de ces huit fonctions, on obtient pour le premier membre de l'équation (15), que nous désignerons par f, les valeurs

$$
\begin{array}{ll}
F = \mathrm{tang}\,\varepsilon, & f = \mp\ \mathrm{tang}\left[\dfrac{\pi}{2} - (\alpha \pm \beta)\right], \\
F = \mathrm{s\acute{e}c}\,\varepsilon, & f = \ \mathrm{s\acute{e}c}\left[\dfrac{\pi}{2} - (\alpha \pm \beta)\right], \\
F = \mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,\varepsilon, & f = \pm\,\mathrm{H}\,\mathrm{tang}\left[\dfrac{\pi}{2}\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)\right], \\
F = \mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\varepsilon, & f = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}\left[\dfrac{\pi}{2}\sqrt{-1} - (\alpha \pm \beta)\right], \\
F = \cot\varepsilon, & f = \pm\ \cot[0 - (\alpha \pm \beta)], \\
F = \mathrm{cos\acute{e}c}\,\varepsilon, & f = \pm\ \mathrm{cos\acute{e}c}[0 - (\alpha \pm \beta)], \\
F = \mathrm{H}\cot\varepsilon, & f = \pm\,\mathrm{H}\ \cot[0 - (\alpha \pm \beta)], \\
F = \mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\varepsilon, & f = \pm\,\mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}[0 - (\alpha \pm \beta)],
\end{array}
$$

qui toutes ont la forme caractéristique; la constante G étant, suivant le cas, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, ou zéro; le coefficient g étant 1, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, ∓ 1, ou ± 1. Ainsi les huit fonctions trigonométriques et exponentielles, dont il s'agit, appartiennent à la classe des (A_i, B_i, C_i); ce sont leurs variétés aux limites de k.

HUITIÈME LEÇON.

Système triple de surfaces isothermes et orthogonales. — Coordonnées nouvelles. — Axes courbes et leurs éléments. — Variétés des surfaces des trois familles. — Hyperbole ombilicale. — Ellipse focale. — Conoïde $\gamma = \alpha$. — Courbe $\gamma = \beta = \alpha$ quand $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

§ LXXX.

SURFACES ISOTHERMES SIMULTANÉES.

Les propriétés mutuelles des trois familles de surfaces, que définissent les fonctions inverses (A_i, B_i, C_i), démontrent en quelque sorte la nécessité de maintenir séparément ces neuf fonctions, malgré les relations qui permettraient de les exprimer à l'aide de trois d'entre elles. En outre, ce sont ces propriétés mêmes qui ont introduit les transcendantes et les fonctions elliptiques dans les diverses branches des mathématiques appliquées. Et, à ce double point de vue, leur étude est indispensable.

Considérons donc simultanément les trois familles de surfaces du second ordre, homofocales et isothermes, que représentent les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = c^2, \\ &\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} - \frac{z^2}{C_1^2} = c^2, \\ &\frac{x^2}{A_2^2} + \frac{y^2}{B_2^2} + \frac{z^2}{C_2^2} = c^2, \end{aligned} \right.$$

et désignons, par α la variable des fonctions inverses

(A, B, C) des hyperboloïdes à deux nappes, par β celle des fonctions inverses (A_1, B_1, C_1) des hyperboloïdes à une nappe, par γ celle des fonctions inverses (A_2, B_2, C_2) des ellipsoïdes.

Les relations qui existent entre les neuf fonctions sont données par le tableau

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad B^2 = k^2 - A^2, \quad C^2 = 1 - A^2, \\ \quad B_1^2 = A_1^2 - k^2, \quad C_1^2 = 1 - A_1^2, \\ \quad B_2^2 = A_2^2 - k^2, \quad C_2^2 = A_2^2 - 1; \\ A_2^2 - A_1^2 = B_2^2 - B_1^2 = C_2^2 + C_1^2 \ (= D^2), \\ A_2^2 - A^2 = B_2^2 + B^2 = C_2^2 + C^2 \ (= D_1^2), \\ A_1^2 - A^2 = B_1^2 + B^2 = C^2 - C_1^2 \ (= D_2^2), \end{array}\right.$$

la seconde case se déduisant de la première.

Les foyers constants de toutes les sections principales des surfaces (1) sont six points situés de part et d'autre du centre, quatre sur l'axe des x, $\dot{\mathfrak{F}}$ et $\dot{\mathfrak{F}}'$ à la distance $b = ck$, $\dot{F}$ et $\dot{F}'$ à la distance c; et deux sur l'axe des y, $\dot{f}$ et $\dot{f}'$ à la distance $\sqrt{c^2 - b^2} = ck$; d'où résulte $k^2 + k'^2 = 1$.

§ LXXXI.

COORDONNÉES NOUVELLES.

Chaque point de l'espace est l'intersection de trois surfaces (1) : d'un hyperboloïde à deux nappes au paramètre α, d'un hyperboloïde à une nappe au paramètre β, d'un ellipsoïde au paramètre γ. Les trois paramètres thermométriques (α, β, γ) forment ainsi un système de coordonnées. Pour passer des coordonnées rectilignes (x, y, z) à ce nouveau système, on a les formules de transformation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} kx &= cA\,A_1\,A_2,\\ kk'y &= cB\,B_1\,B_2,\\ k'z &= cC\,C_1\,C_2; \end{aligned}\right.$$

que l'on déduit, à l'aide de l'élimination, des équations (1). Leur vérification est facile, car, en faisant usage des relations (2), et rappelant que $k'^2 = 1 - k^2$, ces formules transforment respectivement les premiers membres des équations (1) de la manière suivante :

$$\frac{c^2}{k^2k'^2}\left[k'^2A_1^2A_2^2 - (A_1^2 - k^2)(A_2^2 - k^2) - k^2(1 - A_1^2)(A_2^2 - 1)\right] = c^2;$$

$$\frac{c^2}{k^2k'^2}\left[k'^2A_2^2A^2 + (A_2^2 - k^2)(k^2 - A^2) - k^2(A_2^2 - 1)(1 - A^2)\right] = c^2;$$

$$\frac{c^2}{k^2k'^2}\left[k'^2A^2A_1^2 + (k^2 - A^2)(A_1^2 - k^2) + k^2(1 - A^2)(1 - A_1^2)\right] = c^2;$$

c'est-à-dire qu'elles reproduisent les équations (1). Elles donnent en outre, et plus facilement encore,

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{x^2}{A_1^2A_2^2} + \frac{y^2}{B_1^2B_2^2} - \frac{z^2}{C_1^2C_2^2} &= \frac{c^2}{k^2k'^2}\left[k'^2A^2 + (k^2 - A^2) - k^2(1 - A^2)\right] = 0,\\ \frac{x^2}{A_2^2A^2} - \frac{y^2}{B_2^2B^2} - \frac{z^2}{C_2^2C^2} &= \frac{c^2}{k^2k'^2}\left[k'^2A_1^2 - (A_1^2 - k^2) - k^2(1 - A_1^2)\right] = 0\\ \frac{x^2}{A^2A_1^2} - \frac{y^2}{B^2B_1^2} + \frac{z^2}{C^2C_1^2} &= \frac{c^2}{k^2k'^2}\left[k'^2A_2^2 - (A_2^2 - k^2) + k^2(A_2^2 - 1)\right] = 0 \end{aligned}$$

équations qui représentent les cônes contenant les courbes d'intersection des surfaces (1), et qui prouvent que ces surfaces se coupent à angle droit. En effet, (x', y', z') étant les coordonnées courantes, les plans tangents à ces surfaces, au point considéré (x, y, z), ont pour équations

$$\frac{xx'}{A^2} - \frac{yy'}{B^2} - \frac{zz'}{C^2} = c^2,$$

$$\frac{xx'}{A_1^2} + \frac{yy'}{B_1^2} - \frac{zz'}{C_1^2} = c^2,$$

$$\frac{xx'}{A_2^2} + \frac{yy'}{B_2^2} + \frac{zz'}{C_2^2} = c^2,$$

et les expressions des cosinus des angles que ces plans font entre eux, ont respectivement pour facteurs les premiers membres des équations (4), lesquels sont nuls. Les surfaces (1) sont donc orthogonales; et, d'après le beau théorème de M. Charles Dupin, deux des familles des surfaces (1) tracent, sur une surface de la troisième famille, toutes ses lignes de courbure.

§ LXXXII.

SIGNES DES COORDONNÉES.

La simplicité et la symétrie des formules de transformation (3) sont caractéristiques. Ces qualités mêmes ont conduit à la solution de plusieurs questions importantes de la physique mathématique, qui autrement étaient inabordables. On remarquera que, d'après ces formules (3), x s'annule et change de signe avec la fonction impaire A, y avec B_1, z avec C_2, ou, autrement, que x s'annule et change de signe avec le paramètre thermométrique α, y avec le paramètre β, z avec γ.

§ LXXXIII.

ÉLÉMENTS DES INTERSECTIONS.

Les intersections des surfaces (1) qui passent au point considéré, forment en quelque sorte trois axes courbes que nous désignerons par les lettres S, S_1, S_2. Sur S, intersection des deux surfaces aux paramètres β et γ, c'est α qui varie seul, sur S_1 c'est β, sur S_2 c'est γ. On aura donc

$$dS = H\,d\alpha, \quad dS_1 = H_1\,d\beta, \quad dS_2 = H_2\,d\gamma,$$

H, H_1, H_2 étant des fonctions de (α, β, γ) qu'il importe de déterminer.

Pour H, soient dx, dy, dz les projections de dS sur les trois axes rectilignes; les cosinus des angles, que la direction de dS fait avec ces axes, seront

$$\frac{dx}{dS}, \quad \frac{dy}{dS}, \quad \frac{dz}{dS}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{H}\frac{dx}{d\alpha}, \quad \frac{1}{H}\frac{dy}{d\alpha}, \quad \frac{1}{H}\frac{dz}{d\alpha};$$

or la somme des carrés de ces cosinus est l'unité, on a donc

$$H^2 = \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2.$$

Cela posé, sachant, d'après les relations (6) au § 37, que

$$\frac{dA}{d\alpha} = BC, \quad \frac{dB}{d\alpha} = -CA, \quad \frac{dC}{d\alpha} = -AB,$$

les formules de transformation (3) donnent

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{k^2 k'^2}(k'^2 A_1^2 A_2^2 B^2 C^2 + B_1^2 B_2^2 C^2 A^2 + k^2 C_1^2 C_2^2 A^2 B^2);$$

la parenthèse du second membre peut être exprimée en A_i seulement à l'aide des relations (2), et, parce que $k'^2 = 1 - k^2$, elle se réduit définitivement à

$$k^2 k'^2 [A_1^2 A_2^2 - (A_1^2 + A_2^2) A^2 + A^4],$$

ou au produit

$$k^2 k'^2 (A_1^2 - A^2)(A_2^2 - A^2),$$

on a donc enfin

$$H = c\sqrt{A_1^2 - A^2}\sqrt{A_2^2 - A^2}.$$

On trouve, par des opérations semblables,

$$H_1 = c\sqrt{A_2^2 - A_1^2}\sqrt{A_1^2 - A^2},$$
$$H_2 = c\sqrt{A_2^2 - A^2}\sqrt{A_2^2 - A_1^2}.$$

Ou bien, désignant comme nous l'avons fait dans la seconde case du tableau (2), par D^2, D_1^2, D_2^2 les triples valeurs égales écrites aux trois lignes de cette case, on a plus simplement

$$H = cD_1 D_2, \quad H_1 = cD_2 D, \quad H_2 = cDD_1.$$

On conclut de là

$$(5) \qquad dS = cD_1 D_2 d\alpha, \quad dS_1 = cD_2 D\, d\beta, \quad dS_2 = cDD_1\, d\gamma.$$

Et l'on pourra exprimer indifféremment les D_i par les A_i, par les B_i, ou par les C_i.

§ LXXXIV.

USAGE DE CES ÉLÉMENTS.

Les valeurs (5) des dS_i permettent d'évaluer : 1° par des intégrales définies simples la longueur de l'arc S_i compris entre deux surfaces (1) de la famille correspondante; 2° par des intégrales définies doubles l'aire d'une portion de chaque surface (1), limitée par quatre des lignes de courbure de cette surface; 3° par des intégrales définies triples le volume compris entre deux surfaces au paramètre α, deux au paramètre β, deux au paramètre γ. Mais pour bien saisir ces applications des différentielles (5), il est nécessaire de connaître les variétés des surfaces (1), et de préciser les limites des paramètres thermométriques (α, β, γ).

§ LXXXV.

VARIÉTÉS DES HYPERBOLOIDES A DEUX NAPPES.

Commençons par les hyperboloïdes à deux nappes. Quand $\alpha = 0$, on a

$$A = 0, \quad B = k, \quad C = 1,$$

et la première équation (1) se réduit à $x = 0$, quels que soient y et z; la surface est alors le plan des zy dans toute son étendue. Quand $\alpha = \pm \varpi$, on a

$$A = \pm k, \quad B = 0, \quad C = k',$$

la même équation se réduit à $y = 0$; z et x restent indéterminés, mais de telle sorte que l'inégalité

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{z^2}{k'^2} > c^2$$

soit toujours satisfaite, afin que la première valeur infiniment petite de y soit réelle; la surface est alors entièrement couchée sur le plan des zx dans les deux parties intérieures à l'hyperbole qui a pour sommets les points $\dot{\mathfrak{F}}$ et $\dot{\mathfrak{F}}'$, et pour foyers $\dot{F}$ et $\dot{F}'$; c'est une plaque hyperbolique à deux nappes. On imaginera facilement toutes les formes successives que prend la surface générale entre ces deux limites extrêmes. Ses deux nappes, primitivement collées sur le plan des zy, s'en séparent de part et d'autre; leurs sommets s'éloignent de l'origine; elles se courbent vers l'axe des x et se rapprochent de plus en plus du plan des zx, sur lequel elles s'étendent définitivement lorsque les sommets ont atteint les points $\dot{\mathfrak{F}}$ et $\dot{\mathfrak{F}}'$.

§ LXXXVI.

VARIÉTÉS DES HYPERBOLOIDES A UNE NAPPE.

Passons aux hyperboloïdes à une nappe. Quand $\beta = 0$, on a

$$A_1 = k, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = k',$$

et la seconde équation (1) se réduit encore à $y = 0$; mais z et x, qui restent indéterminés, doivent maintenant vérifier l'inégalité

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{z^2}{k'^2} < c^2;$$

la surface est entièrement couchée sur le plan des zx dans la partie extérieure à l'hyperbole définie plus haut; c'est une plaque hyperbolique à une nappe. Quand $\beta = \pm \varpi'$, on a

$$A_1 = 1, \quad B_1 = \pm k', \quad C_1 = 0;$$

la même équation se réduit à $z = 0$; mais x et y, qui restent indéterminés, doivent vérifier l'inégalité

$$x^2 + \frac{y^2}{k'^2} > c^2;$$

la surface est alors couchée sur le plan des xy; elle occupe toute la partie extérieure à l'ellipse qui a $\dot{\mathrm{F}}$, $\dot{\mathrm{F}}'$, $\dot{\mathrm{f}}$, $\dot{\mathrm{f}}'$ pour sommets, $\dot{\mathfrak{F}}$ et $\dot{\mathfrak{F}}'$ pour foyers; c'est une plaque indéfinie avec vide elliptique. Entre ces deux limites extrêmes, la surface générale, d'abord aplatie sur le plan des zx, se dédouble et s'ouvre dans le sens des y; les quatre sommets de son ellipse de gorge marchent de $\dot{\mathfrak{F}}$ et $\dot{\mathfrak{F}}'$ vers $\dot{\mathrm{F}}$ et $\dot{\mathrm{F}}'$, du centre vers $\dot{\mathrm{f}}$ et $\dot{\mathrm{f}}'$; en même temps la surface s'évase de plus en plus, en se penchant de toutes parts vers le plan des xy, sur lequel elle s'étend entièrement quand son ellipse de gorge a complété le vide définitif.

§ LXXXVII.

VARIÉTÉS DES ELLIPSOIDES.

Arrivons enfin aux ellipsoïdes. Quand $\gamma = 0$, on a

$$A_2 = 1, \quad B_2 = k', \quad C_2 = 0;$$

la troisième équation (1) se réduit aussi à $z = 0$; mais x et y, qui restent indéterminés, doivent maintenant vérifier l'inégalité

$$x^2 + \frac{y^2}{k'^2} < c^2;$$

la surface, couchée sur le plan des xy, occupe seulement la partie intérieure à l'ellipse définie plus haut; c'est une plaque elliptique. Quand $\gamma = \pm \varpi$, les trois fonctions A_2, B_2, C_2 sont infinies et égales entre elles; la surface est une sphère de rayon infini. L'ellipsoïde général, d'abord excessivement aplati, se développe de plus en plus; ses six sommets s'éloignent indéfiniment à partir de $\dot{F}$ et $\dot{F}'$, de $\dot{f}$ et $\dot{f}'$, du centre; et en même temps les rapports de ses axes tendent vers l'unité.

§ LXXXVIII.

DÉFINITION DES SIGNES.

Dans cette revue successive, par mouvement et déformation, de toutes les surfaces que représentent les équations (1), les correspondances de signes que les formules (3) établissent entre x et α, y et β, z et γ se définissent naturellement. Pour le premier hyperboloïde, dès que ses deux nappes se séparent du plan des zy, l'une prend la valeur positive du paramètre α, l'autre la valeur négative. Pour le second hyperboloïde, dès que la plaque hyperbolique à une nappe du plan des zx se dédouble dans le sens des y, la partie qui se développe en avant prend la valeur positive du paramètre β, l'autre la valeur négative. Enfin pour l'ellipsoïde, dès que la plaque elliptique du plan des xy se dédouble dans le sens des z, la partie qui se développe vers le haut prend la valeur positive du paramètre γ, celle qui se développe vers le bas la valeur négative.

§ LXXXIX.

HYPERBOLE OMBILICALE. ELLIPSE FOCALE.

Le passage des hyperboloïdes de la première famille à ceux de la seconde se fait par l'intermédiaire de l'hyperbole dont les équations sont

$$(6) \qquad y = 0, \quad \frac{x^2}{k^2} - \frac{z^2}{k'^2} = c^2.$$

Le passage des hyperboloïdes à une nappe aux ellipsoïdes se fait par l'intermédiaire de l'ellipse ayant pour équations

$$(7) \qquad z = 0, \quad x^2 + \frac{y^2}{k'^2} = c^2.$$

Ces deux courbes, dont les grandeurs et les positions relatives suffisent pour définir le triple système, méritent d'être désignées par des noms spéciaux. L'hyperbole (6) traçant sur chaque ellipsoïde de la troisième famille les quatre points, si importants dans la théorie de cette surface, auxquels on a donné le nom d'ombilics, nous l'appellerons l'*hyperbole ombilicale*. L'ellipse (7) réunissant dans ses propres foyers et dans ses quatre sommets les six foyers constants du système triple, nous l'appellerons l'*ellipse focale*, nom déjà adopté par plusieurs géomètres.

§ XC.

APPLICATIONS DES ÉLÉMENTS.

L'hyperbole ombilicale est une des courbes S_2; elle a pour équations

$$\alpha = \varpi, \quad \beta = 0; \quad \text{d'où} \quad B = 0, \quad B_1 = 0;$$

et si l'on exprime les D_i par les B_i, l'élément (5) de cette courbe est $dS_2 = B_2^2\, d\gamma$; ce qui donne l'intégrale transcendante

$$\int B_2^2(\gamma)\, d\gamma,$$

pour évaluer les arcs d'hyperbole. L'ellipse focale est une des courbes S; elle a pour équations

$$\beta = \varpi', \quad \gamma = 0; \quad \text{d'où} \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0;$$

et si l'on exprime les D_i par les C_i, l'élément (5) de cette courbe est $dS = C^2\, d\alpha$; ce qui donne l'intégrale transcendante

$$\int C^2(\alpha)\, d\alpha,$$

pour évaluer les arcs d'ellipse.

Dans le système des coordonnées (α, β, γ), l'élément de volume est

$$dS\, dS_1\, dS_2 \quad \text{ou} \quad c^3 D^2 D_1^2 D_2^2\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

S'il s'agit d'évaluer le volume total d'un ellipsoïde, on intégrera cet élément de $\alpha = 0$ à $\alpha = \varpi$, de $\beta = 0$ à $\beta = \varpi'$, de $\gamma = 0$ à γ; ce qui donnera la partie du volume cherché comprise dans l'angle trièdre des coordonnées positives, et qu'il faudra conséquemment prendre huit fois. On sait d'ailleurs que le volume total est $\frac{4}{3}\pi c^3 A_2 B_2 C_2$; on aura donc identiquement

$$(8)\qquad \int_0^{\gamma}\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi} D^2 D_1^2 D_2^2\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \frac{\pi}{6} A_2 B_2 C_2;$$

résultat vérifié par Poisson, lors de l'apparition des nouvelles coordonnées.

On conçoit que si l'on a, entre les paramètres du système triple (1), une équation de la forme $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, le lieu géométrique des points de l'espace dont les coordonnées (α, β, γ) vérifieront cette équation sera une certaine surface; que si l'on a deux équations entre les mêmes variables, elles représenteront une ligne courbe. Dans les deux cas, si l'on veut exprimer le lieu géométrique en (x, y, z), il faudra éliminer les paramètres (α, β, γ) entre les équations données et les formules de transformation (3). Voici deux exemples pour lesquels cette élimination s'opère sans difficulté.

§ XCI.

CONOIDE $\gamma = \alpha$.

Dans notre système de coordonnées, α et γ varient entre les deux mêmes limites $-\varpi$ et $+\varpi$, et l'on peut se demander quel est le lieu géométrique des points de l'espace pour lesquels γ et α ont la même valeur numérique, c'est-à-dire de reconnaître la surface dont l'équation est $\gamma = \alpha$. Pour tous les points de cette surface on aura, d'après les formules (2) du § 67,

$$A_2 = k\frac{C}{B},\quad B_2 = \frac{k k'}{B},\quad C_2 = k'\frac{A}{B};$$

substituant dans les formules (3), elles deviennent

$$(9)\qquad x = cA_1\frac{AC}{B},\quad y = cB_1,\quad z = cC_1\frac{AC}{B};$$

et l'on a successivement, à l'aide des relations (2),

$$y^2 = c^2 B_1^2 = c^2 (A_1^2 - k^2), \quad A_1^2 = \frac{c^2 k^2 + y^2}{c^2},$$

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{C_1^2}{A_1^2} = \frac{1 - A_1^2}{A_1^2} = \frac{c^2 k'^2 - y^2}{c^2 k^2 + y^2};$$

l'équation en (x, y, z) de la surface cherchée est donc

$$y^2 (x^2 + z^2) = c^2 (k'^2 x^2 - k^2 z^2).$$

On peut mettre cette équation sous les deux formes

$$z = \pm x \sqrt{\frac{c^2 k'^2 - y^2}{c^2 k^2 + y^2}},$$

$$c^2 (y^2 + z^2 - c^2 k'^2) = (x^2 + z^2 - c^2)(c^2 k'^2 - y^2).$$

La première montre que la surface est engendrée par le mouvement d'une droite qui reste constamment parallèle au plan des zx, en rencontrant toujours l'axe des y ; c'est un conoïde. La seconde forme fait voir que la courbe d'intersection des deux cylindres droits

$$y^2 + z^2 = c^2 k'^2, \quad x^2 + z^2 = c^2$$

se trouve sur la surface; cette intersection peut être prise pour la directrice du conoïde. La surface est entièrement comprise entre les deux plans parallèles à celui des zx, menés par les foyers constants $\dot{\mathrm{f}}$ et f'.

§ XCII.

COURBE $\gamma = \beta = \alpha$ QUAND $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La coordonnée β variant entre les limites $-\varpi'$ et $+\varpi'$, différentes de $-\varpi$ et $+\varpi$, on ne pourrait pas traiter aussi simplement le cas d'une surface dont l'équation contiendrait β. Mais il existe un système triple pour lequel on retrouve la même simplicité; c'est celui qui correspond au rapport $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$; son conjugué se confond avec lui, et l'on a $\varpi' = \varpi$. On peut alors se demander quel est le lieu géométrique des points où les trois paramètres ont la même valeur numérique, c'est-à-dire de reconnaître la courbe représentée par les équations $\beta = \gamma = \alpha$. Cette courbe se trouve déjà sur le conoïde $\gamma = \alpha$, dont l'équation en (x, y, z) est actuellement

$$y^2(z^2 + x^2) = \frac{c^2}{2}(x^2 - z^2).$$

Pour trouver une seconde surface qui contienne la même courbe, rappelons les formules (6 *bis*), § 48, en y supprimant les accents et faisant $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, elles donneront

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,C}, \quad B_1 = \frac{A}{\sqrt{2}\,C}, \quad C_1 = \frac{B}{C},$$

pour tous les points du lieu géométrique cherché, lequel est tel que $\beta = \alpha$; substituant ces valeurs dans les équations (9), qui ont encore lieu, dans le cas actuel, puisque $\gamma = \alpha$, elles deviendront

$$x = \frac{cA}{\sqrt{2}\,B}, \quad y = \frac{cA}{\sqrt{2}\,C}, \quad z = cA;$$

d'où

$$\sqrt{2}\,B = \frac{z}{x}, \quad \sqrt{2}\,C = \frac{z}{y};$$

et comme $C^2 - B^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$, il s'ensuit

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}, \quad \text{ou} \quad y^2(z^2 + x^2) = x^2 z^2;$$

telle est la seconde surface.

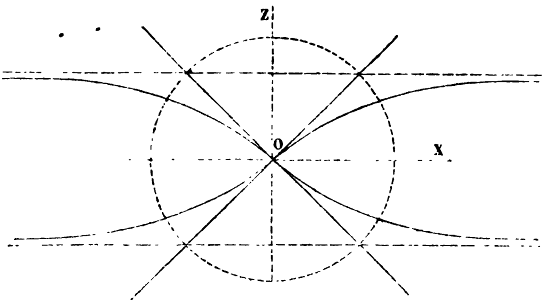
Les équations en $(x, y\ z)$ de la courbe cherchée sont donc

$$y^2(z^2+x^2) = x^2z^2 = \frac{c^2}{2}(x^2-z^2);$$

ce qui donne, pour exprimer le cylindre projetant la courbe sur le plan des zx ou la projection même, l'équation

$$x = \pm c\frac{z}{\sqrt{c^2-2z^2}},\quad \text{d'où}\quad \frac{dx}{dz} = \pm\frac{c^3}{(c^2-2z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dérivée qui se réduit à ± 1 pour $z=0$. La figure suivante



représente cette projection; le cercle a pour rayon c; les deux tangentes au point multiple et de double inflexion sont orthogonales; les deux asymptotes, parallèles à l'axe des x, ont pour équation $z = \pm\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Dans les recherches faites à l'aide du système coordonné défini dans cette leçon, au lieu des paramètres thermométriques (α, β, γ), on adopte les paramètres géométriques (ν, μ, ρ), § 35, ou les premiers axes des surfaces orthogonales conjuguées. Les autres axes sont exprimés par des radicaux, qui font disparaître la symétrie des formules de transformation (3). Alors x s'annule et change de signe avec ν; mais on n'établit pas sans quelque peine que y doit changer de signe avec le radical $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, z avec $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. En outre, par ces coordonnées (ν, μ, ρ), dites *elliptiques*, l'expression des arcs élémentaires dS_i est beaucoup plus compliquée.

En général, lorsqu'il s'agit de choisir une variable indépendante entre une transcendante et toutes ses fonctions inverses, c'est la transcendante qu'il faut prendre. On évite ainsi les complications, les ambiguïtés et le défaut de symétrie.

NEUVIÈME LEÇON.

Résumé du système général. — Indétermination aux limites du rapport k. — Transformation des (A, B, C) en $\mathcal{A}\alpha$; des (A_1, B_1, C_1) en $\mathcal{B}\beta$. — Systèmes des ellipsoïdes planétaires et ovaires. — Déformations des (A_i, B_i, C_i). — Système sphérique général.

---

§ XCIII.

RÉSUMÉ DU SYSTÈME GÉNÉRAL.

Il est nécessaire de rapprocher plusieurs tableaux disséminés dans les leçons précédentes, et de résumer en peu de mots notre étude actuelle afin de faciliter ses dernières conséquences. Ayant pris pour exemple la famille de surfaces au paramètre λ représentée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

où la constante b est moindre que c, on vérifie sur elle la condition de l'isothermie, en trouvant pour le rapport $S\frac{d^2\lambda}{du^2} : S'\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2$, la somme $\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - b^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}\right)$ fonction de λ seul. Cette somme égalée à $\frac{\varphi'}{\varphi}$ sert à déterminer la fonction φ qui, substituée dans l'intégrale $\int \frac{d\lambda}{\varphi}$, doit donner le paramètre thermométrique ε. Trois cas se présentent suivant que le paramètre géométrique λ est inférieur à b, compris entre b et c, supérieur à c; désignant respectivement, dans ces trois cas, par ν, μ, ρ les valeurs de λ, par α, β, γ

celles de ε, on a

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\alpha &= c\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}, & \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}&=1,\\
\beta &= c\int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}, & \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}&=1,\\
\gamma &= c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}, & \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}&=1,
\end{aligned}\right.$$

ce qui donne trois familles de surfaces isothermes comprises dans l'équation (1). Tous les axes de ces surfaces sont des paramètres géométriques importants; égalant donc chacun d'eux à la constante c multipliée par une fonction inverse spéciale, on a le tableau

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\nu &= cA(\alpha), & \sqrt{b^2-\nu^2}&=cB(\alpha), & \sqrt{c^2-\nu^2}&=cC(\alpha);\\
\mu &= cA_1(\beta), & \sqrt{\mu^2-b^2}&=cB_1(\beta), & \sqrt{c^2-\mu^2}&=cC_1(\beta);\\
\rho &= cA_2(\gamma), & \sqrt{\rho^2-b^2}&=cB_1(\gamma), & \sqrt{\rho^2-c^2}&=cC_2(\gamma);
\end{aligned}\right.$$

et désignant par k le rapport $\frac{b}{c}$, les relations

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
k&=\frac{b}{c}, & k'&=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}, & k^2+k'^2&=1;\\
A^2+B^2&=k^2, & A^2+C^2&=1, & C^2-B^2&=k'^2;\\
A_1^2-B_1^2&=k^2, & A_1^2+C_1^2&=1, & B_1^2+C_1^2&=k'^2;\\
A_2^2-B_2^2&=k^2, & A_2^2-C_2^2&=1, & B_2^2-C_2^2&=k'^2.
\end{aligned}\right.$$

Représentant par ϖ et ϖ' les intégrales définies suivantes:

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\varpi &= c\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = c\int_c^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}},\\
\varpi' &= c\int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}} = c\int_0^{\sqrt{c^2-b^2}} \frac{d\nu'}{\sqrt{c^2-b^2-\nu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}},
\end{aligned}\right.$$

on démontre que les neuf fonctions inverses (3) ont toutes une période réelle qui est : 4ϖ pour (A, B, A_2, B_2), 2ϖ pour (C, C_2), $4\varpi'$ pour (B_1, C_1), $2\varpi'$ pour A_1 ; qu'elles ont toutes aussi une période imaginaire, qui est : $4\varpi'\sqrt{-1}$ pour (B, C, B_2, C_2), $2\varpi'\sqrt{-1}$ pour (A, A_2), $4\varpi\sqrt{-1}$ pour (A_1, B_1), $2\varpi\sqrt{-1}$ pour C_1. Les fonctions (A, B_1, C_2) sont seules impaires ; les six autres sont paires.

Les équations des trois familles de surfaces et les formules de transformation que l'élimination en déduit, sont

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}-\dfrac{z^2}{C^2}=c^2, & k\,x = cAA_1A_2,\\[2ex] \dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{B_1^2}-\dfrac{z^2}{C_1^2}=c^2, & kk'y = cBB_1B_2,\\[2ex] \dfrac{x^2}{A_2^2}+\dfrac{y^2}{B_2^2}+\dfrac{z^2}{C_2^2}=c^2; & k'z = cCC_1C_2. \end{array}\right.$$

Ces familles de surfaces sont orthogonales, et leurs paramètres (α, β, γ) forment un système de coordonnées ; α et γ variant de $-\varpi$ à $+\varpi$, β de $-\varpi'$ à $+\varpi'$, dans ce système.

On passe de la première famille à la seconde, de la seconde à la troisième, par l'intermédiaire de deux courbes, dont les équations sont

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} \underbrace{\text{en } (x,\ y,\ z)} & \underbrace{\text{en } (\alpha,\ \beta,\ \gamma)}\\[2ex] y=0,\quad \dfrac{x^2}{k^2}-\dfrac{z^2}{k'^2}=c^2; & \alpha=\varpi,\quad \beta=0.\\[2ex] z=0,\quad x^2+\dfrac{y^2}{k'^2}=c^2; & \beta=\varpi',\quad \gamma=0. \end{array}\right.$$

La première est l'hyperbole ombilicale (lieu géométrique des ombilics de tous les ellipsoïdes de la troisième famille).

La seconde courbe est l'ellipse focale (ayant pour foyers et pour sommets les six foyers constants du système).

§ XCIV.

GÉNÉRALITÉ. ANOMALIES.

Pour toute grandeur de la ligne c, qui ne soit pas nulle, pour toute valeur du rapport k, qui ne soit ni zéro, ni l'unité, on a le même ensemble de surfaces isothermes orthogonales, de fonctions inverses doublement périodiques, et de coordonnées thermométriques. Les nombres ϖ et ϖ', qui dépendent de k, sont finis, et toutes les formules précédentes n'offrent aucune indétermination.

Il n'en est plus de même aux limites de k, qui sont zéro et l'unité : alors une des trois familles de surfaces semble disparaître; les fonctions inverses sont en nombre moindre; elles n'ont plus chacune qu'une seule période, réelle ou imaginaire; des deux nombres ϖ et ϖ' on n'en retrouve plus qu'un, qui est $\frac{\pi}{2}$; enfin, les formules de transformation (6) sont indéterminées. Des disparitions et des indéterminations d'une autre nature ont lieu, quand la ligne c est infiniment petite ou nulle. Il s'agit d'analyser ces cas extrêmes et de rétablir, pour eux, les propriétés du système général, avec les modifications qu'exigent ces cas particuliers. Laissons d'abord la constante c finie et quelconque.

§ XCV.

INDÉTERMINATION LORSQUE $k = 0$.

Lorsque la constante b est nulle, ou que $k = 0$, le paramètre géométrique ν, qui doit toujours être compris entre 0 et b est nul, ainsi que $\sqrt{b^2-\nu^2}$, et $\sqrt{c^2-\nu^2}$ se réduit à la constante c; les fonctions inverses A et B sont donc nulles, et C est égal à l'unité; la famille des hyperboloïdes à deux nappes, au paramètre α, semble disparaître, et les formules de transformation (6) sont indéterminées. Mais les fonctions A, B étant nulles avec k, les rapports $\frac{A}{k}$, $\frac{B}{k}$, sont des *zéro sur zéro* dont il faut chercher les valeurs. A cet effet, laissant k quelconque, on essayera de substituer au groupe des fonctions (A, B, C) une seule fonction inverse, dont les premières dépendront, et qu'il faudra choisir de telle sorte que les rapports $\frac{A}{k}$, $\frac{B}{k}$ soient toujours assignables, lors même que k serait nul.

§ XCVI.

TRANSFORMATION DES (A, B, C) EN $\mathcal{A}\alpha$.

Remarquant que A et B vérifient la relation $A^2+B^2=k^2$, que A est une fonction impaire et B une fonction paire, on posera $\frac{A}{k}=\sin\theta$, $\frac{B}{k}=\cos\theta$, et θ sera la fonction intermédiaire cherchée, si rien ne s'oppose à sa détermination. Par son introduction, on a, tableau (3),

$$\nu=b\sin\theta,\quad \sqrt{b^2-\nu^2}=b\cos\theta,\quad \sqrt{c^2-\nu^2}=c\sqrt{1-k^2\sin^2\theta},$$

ce qui donne d'abord

$$\frac{cd\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}=\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

et par l'intégration

$$
(8)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}},\\
\varpi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}},\\
\varpi' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\theta'}}.
\end{aligned}
\right.
$$

La fonction inverse θ, que nous désignerons par $\mathcal{A}\alpha$, est déterminée par la première intégrale (8) ; les deux autres intégrales, lesquelles sont *définies*, sont des expressions nouvelles des nombres ϖ et ϖ'. Les fonctions primitives A, B, C seront données par les formules

$$
(9)\qquad \frac{A}{k} = \sin \mathcal{A}\alpha, \quad \frac{B}{k} = \cos \mathcal{A}\alpha, \quad C = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mathcal{A}\alpha}.
$$

L'équation de la première famille de surfaces, et les formules de transformation du tableau (6), pourront se mettre sous la nouvelle forme

$$
(10)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\sin^2 \mathcal{A}\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \mathcal{A}\alpha} = k^2 \left(c^2 + \frac{z^2}{1 - k^2 \sin^2 \mathcal{A}\alpha}\right)\\
&x = c A_2 A_1 . \sin \mathcal{A}\alpha,\\
&k' y = c B_2 B_1 . \cos \mathcal{A}\alpha,\\
&k' z = c C_2 C_1 . \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mathcal{A}\alpha},
\end{aligned}
\right.
$$

qui, vu son manque de symétrie, ne saurait être préférée à la première, tant que k n'est pas nul.

§ XCVII.

SYSTÈME DES ELLIPSOIDES PLANÉTAIRES.

Mais à cette limite même la forme (10) acquiert une importance remarquable par l'absence de toute indétermination. Faisant $k = 0$, les intégrales (8) donnent

$$(11)\qquad \theta = \mathcal{A}\alpha = \alpha, \quad \varpi = \frac{\pi}{2}, \quad \varpi' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\cos\theta'} = \infty;$$

les vraies valeurs des rapports (9) sont

$$(12)\qquad \left(\frac{A}{k}\right) = \sin\alpha, \quad \left(\frac{B}{k}\right) = \cos\alpha, \quad C = 1;$$

l'équation (10), de la première famille des surfaces isothermes au paramètre α, se réduit à

$$(13)\qquad \frac{x^2}{\sin^2\alpha} = \frac{y^2}{\cos^2\alpha},$$

et représente des plans méridiens menés par l'axe polaire des z. Les deux autres familles (6) sont des hyperboloïdes à une nappe et des ellipsoïdes planétaires, tous de révolution autour du même axe des z; leurs fonctions inverses sont, d'après la seconde leçon et les relations (4),

$$(14)\qquad \begin{cases} B_1 = A_1 = \dfrac{1}{E(\beta)} = H\,\text{séc}\,\beta, & C_1 = \dfrac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)} = H\,\text{tang}\,\beta, \\[2ex] B_2 = A_2 = \dfrac{1}{\cos\gamma} = \text{séc}\,\gamma, & C_2 = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \text{tang}\,\gamma; \end{cases}$$

en sorte que, k' étant l'unité, le nouveau système orthogonal est complétement déterminé par les formules de transformation

$$
(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= c.\sin\alpha.\mathrm{H}\,\text{séc}\,\beta.\text{séc}\,\gamma, \\ y &= c.\cos\alpha.\mathrm{H}\,\text{séc}\,\beta.\text{séc}\,\gamma, \\ z &= c.\mathrm{H}\,\text{tang}\,\beta.\text{tang}\,\gamma. \end{aligned} \right.
$$

Puisque $k=0$, $k'=1$, l'hyperbole ombilicale (7) a pour équations $y=0$, $z=0$, et se confond avec l'axe des z; ce qui donne les pôles pour ombilics aux ellipsoïdes planétaires. L'ellipse focale a maintenant pour équations $z=0$, $x^2+y^2=c^2$; c'est le cercle qui passe par les foyers constants des sections méridiennes.

§ XCVIII.

PREMIÈRES DÉFORMATIONS DES (A_i, B_i, C_i).

Ainsi, des neuf fonctions du système général, le pseudosinus A est remplacé par un sinus, le pseudocosinus B par un cosinus, le pseudorayon C par l'unité, B_1 et A_1 sont devenus une même hyposécante, C_1 une hypotangente; B_2 et A_2 une même sécante, C_2 une tangente. Ne comptant chaque fonction double que pour une seule, et ne soupçonnant pas la transformation si remarquable du groupe (A, B, C), on ne trouvait que quatre des neuf fonctions. Maintenant toutes répondent à l'appel. Mais ϖ étant $\frac{\pi}{2}$, et ϖ' infini, elles ont toutes perdu une de leurs périodes : il n'y a plus qu'une période réelle, 2π pour $\left(\frac{A}{k}, \frac{B}{k}, A_2 = B_2\right)$, π pour C_2, plus qu'une période imaginaire, $2\pi\sqrt{-1}$ pour $(A_1 = B_1)$, $\pi\sqrt{-1}$ pour C_1. On peut dire, il est vrai, que les périodes qui ont disparu sont devenues infinies. Quant à la fonction C, étant maintenant constante, elle n'a plus de périodes.

Dans les formules (15), x change de signe comme $\sin\alpha$,

y comme $\cos\alpha$, z à la fois avec β et γ. Ce n'est plus comme au cas général (6), où y change de signe avec β; la fonction B_1, d'impaire qu'elle est quand k n'est pas zéro, est devenue égale à A_1 fonction restée paire. Il y a là un changement brusque, qui tient à ce qu'on est obligé de prendre

$$\beta = c\int_\mu^c \frac{d\mu}{\mu\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

ne pouvant adopter pour limite inférieure $\mu = b = 0$, qui introduirait l'infini.

§ XCIX.

INDÉTERMINATION LORSQUE $k = 1$.

Lorsque les deux constantes b et c sont égales, ou que $k = 1$ et $k' = 0$, le paramètre géométrique μ, qui doit toujours être compris entre b et c, est aussi égal à b ou à c; $\sqrt{\mu^2-b^2}$ et $\sqrt{c^2-\mu^2}$ sont donc nuls, alors la fonction A_1 est égale à l'unité, et les fonctions B_1 et C_1 s'évanouissent; la famille d'hyperboloïdes à une nappe au paramètre β semble anéantie; et les formules (6) sont encore indéterminées. On fera disparaître cette indétermination en introduisant la fonction inverse intermédiaire ψ qui, k' étant quelconque, sert à vérifier la relation $B_1^2 + C_1^2 = k'^2$, en posant $\frac{B_1}{k'} = \sin\psi$, $\frac{C_1}{k'} = \cos\psi$.

§ C.

TRANSFORMATION DES (A_1, B_1, C_1) EN $\mathfrak{M}\beta$.

Par cette introduction, on aura

$$\sqrt{\mu^2-b^2} = \sqrt{c^2-b^2}.\sin\psi,$$
$$\sqrt{c^2-\mu^2} = \sqrt{c^2-b^2}.\cos\psi,$$
$$\mu = c.\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi},$$

ce qui donne d'abord

$$\frac{c\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi}},$$

et ensuite, par intégration,

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}\beta &= \int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi}},\\ \varpi' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi}},\\ \varpi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi'}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi'}}.\end{aligned}\right.$$

La première intégrale transcendante détermine la fonction inverse ψ, que nous désignerons par $\mathfrak{A}\beta$; les deux autres intégrales, lesquelles sont *définies*, donnent encore d'autres expressions des nombres ϖ et ϖ'. Les fonctions primitives (A_1, B_1, C_1) sont liées à $\psi=\mathfrak{A}\beta$ par les formules

$$(17)\quad A_1=\sqrt{1-k'^2\cos^2\mathfrak{A}\beta},\quad \frac{B_1}{k'}=\sin\mathfrak{A}\beta,\quad \frac{C_1}{k'}=\cos\mathfrak{A}\beta.$$

L'équation de la seconde famille de surfaces (6) et les formules de transformation peuvent donc se mettre sous la forme

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{y^2}{\sin^2\mathfrak{A}\beta}-\frac{z^2}{\cos^2\mathfrak{A}\beta}=k'^2\left(c^2-\frac{x^2}{1-k'^2\cos^2\mathfrak{A}\beta}\right),\\ &kx=c.A_2A.\sqrt{1-k'^2\cos^2\mathfrak{A}\beta},\\ &ky=c.B_2B.\sin\mathfrak{A}\beta,\\ &z=c.C_2C.\cos\mathfrak{A}\beta,\end{aligned}\right.$$

plus compliquée que la forme primitive, tant que k n'est pas l'unité, ou que k' n'est pas zéro, mais qui, à cette limite, fait disparaître toute indétermination.

§ CI.

SYSTÈME DES ELLIPSOIDES OVAIRES.

Faisant $k'=0$, $k=1$, les intégrales (16) donnent

$$(19)\qquad \psi = \text{Ab}\,\beta = \beta,\quad \varpi' = \frac{\pi}{2},\quad \varpi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi'}{\sin\psi'} = \infty.$$

Les vraies valeurs des rapports (17) deviennent

$$(20)\qquad A_1 = 1,\quad \left(\frac{B_1}{k'}\right) = \sin\beta,\quad \left(\frac{C_1}{k'}\right) = \cos\beta.$$

L'équation (18), de la famille de surfaces isothermes au paramètre β, est

$$(21)\qquad \frac{y^2}{\sin^2\beta} = \frac{z^2}{\cos^2\beta},$$

et représente des plans méridiens menés par l'axe polaire des x. Les deux autres familles (6) sont des ellipsoïdes ovaires et des hyperboloïdes à deux nappes, tous de révolution autour du même axe des x; leurs fonctions inverses sont, d'après la seconde leçon et les relations (4),

$$(22)\qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{E(\gamma)}{\mathcal{E}(\gamma)} = H\cot\gamma, & B_2 = C_2 = \dfrac{1}{\mathcal{E}(\gamma)} = H\,\text{coséc}\,\gamma, \\[2ex] A = \dfrac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)} = H\,\text{tang}\,\alpha, & B = C = \dfrac{1}{E(\alpha)} = H\,\text{séc}\,\alpha, \end{cases}$$

en sorte que, k étant l'unité, le nouveau système orthogonal est complétement déterminé par les formules de transformation

$$(23)\qquad \begin{cases} x = c\,.\,\mathrm{H}\cot\gamma\,.\,\mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,\alpha, \\ y = c\,.\,\mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\gamma\,.\,\mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\alpha\,.\sin\beta, \\ z = c\,.\,\mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\gamma\,.\,\mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\alpha\,.\cos\beta. \end{cases}$$

L'équation $z^2 = k'^2\left(\frac{x^2}{k^2} - c^2\right)$, pour l'hyperbole ombilicale, devient $z = 0$, et x doit surpasser c; la courbe se réduit à l'axe polaire, moins la ligne qui sépare les deux seuls foyers constants; elle donne encore les pôles pour ombilics aux ellipsoïdes ovaires. L'équation $y^2 = k'^2(c^2 - x^3)$, pour l'ellipse focale, devient $y = 0$, et x doit être moindre que c; la courbe se réduit à la droite qui joint les deux foyers.

§ CII.

DEUXIÈMES DÉFORMATIONS DES (A_i, B_i, C_i).

Des neuf fonctions du système général, A_1 est remplacé par l'unité, B_1 par un sinus, C_1 par un cosinus, B_2 et C_2 sont devenus une même hypocosécante, A_2 une hypocotangente, B et C une même hyposécante, A une hypotangente. Mais ces fonctions, toutes retrouvées, ont perdu une de leurs périodes; il n'y a plus qu'une période réelle 2π pour $\left(\frac{B_1}{k'}, \frac{C_1}{k'}\right)$, plus qu'une période imaginaire, $2\pi\sqrt{-1}$ pour $(B_2 = C_2, B = C)$, $\pi\sqrt{-1}$ pour (A_2, A); les autres périodes ont disparu par l'infini ϖ. La fonction A_1, devenue constante, n'a plus de période.

Dans les formules (23), x change de signe avec α, z avec $\cos\beta$, y avec $\sin\beta$, et ces trois coordonnées changent toutes de signe avec γ. Ces modifications, au cas général (6), tiennent à ce qu'on est obligé de prendre

$$\gamma = c\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^2 - c^2},$$

ne pouvant adopter la limite inférieure $\rho = c$, qui introduirait l'infini.

§ CIII.

SYSTÈME SPHÉRIQUE GÉNÉRAL.

Il reste à examiner ce que devient le système général quand la ligne c est nulle. On peut admettre que k et k' conservent des valeurs fixes, b ayant diminué comme c. Si l'on remplace le groupe (A_2, B_2, C_2) par la seule fonction inverse ρ ou cA_2, les équations (2) deviendront

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} - \dfrac{z^2}{C^2} = c^2, & x = \rho . \dfrac{A}{k} \cdot A_1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{A_1} + \dfrac{y^2}{B_1^2} - \dfrac{z^2}{C_1^2} = c^2, & y = \sqrt{\rho^2 - k^2c^2}\, \dfrac{B}{k} \cdot \dfrac{B_1}{k'}, \\[2ex] \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - k^2c^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, & z = \sqrt{\rho^2 - c^2} . C . \dfrac{C_1}{k'}. \end{array}\right.$$

Et si l'on fait $c = 0$, ce qui ne change rien aux fonctions (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), car les $(\alpha, \beta, \varpi, \varpi')$ mis sous les formes (8) ou (16), sont tout à fait indépendants de c, le tableau (24) devient

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{A^2} = \dfrac{y^2}{B^2} + \dfrac{z^2}{C_1^2}, & x = \rho . \dfrac{A}{k} \cdot A_1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{B_1^2} = \dfrac{z^2}{C_1^2}, & y = \rho . \dfrac{B}{k} \cdot \dfrac{B_1}{k'}, \\[2ex] x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, & z = \rho . C . \dfrac{C_1}{k'}, \end{array}\right.$$

et les surfaces orthogonales sont actuellement des sphères concentriques, et deux familles de cônes homofocaux et isothermes, entourant les axes des x et des z. Il ne reste plus qu'à substituer la valeur $\rho = \dfrac{a}{\gamma}$ (trouvée au § 7), pour introduire la coordonnée thermométrique γ.

§ CIV.

APPLICATION NOUVELLE DES dS_i.

Si dans les différentielles dS, dS_1, du § 83, on exprime les D_i par les A_i, qu'on remplace cA_2 par ρ, puis qu'on fasse $c = 0$, elles deviennent

$$dS = \rho \sqrt{A_1^2 - A^2}\, d\alpha, \quad dS_1 = \rho \sqrt{A_1^2 - A^2} . d\beta;$$

ce sont les éléments des courbes sphériques, intersections des cônes isothermes et de la sphère de rayon ρ. On aura la huitième partie de la surface de cette sphère, en intégrant le produit $dS . dS_1$, de $\alpha = 0$ à $\alpha = \varpi$, de $\beta = 0$ à $\beta = \varpi'$; ce qui donne nécessairement

$$\int_0^{\varpi'} \int_0^{\varpi} [A_1^2(\beta) - A^2(\alpha)]\, d\alpha\, d\beta = \frac{\pi}{2};$$

formule que Poisson a vérifiée.

§ CV.

SYSTÈME SPHÉRIQUE PARTICULIER.

Lorsque la question que l'on traite n'exige pas que le système sphérique orthogonal (25) soit rapporté à ses paramètres thermométriques, on peut prendre pour coordonnées le rayon ρ, et les deux fonctions inverses θ et ψ, introduites aux §§ 96 et 100, et, à l'aide des valeurs (9) et (17), on a

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \rho . \sin\theta . \sqrt{1 - k'^2 \cos^2\psi}, \\ y &= \rho . \cos\theta . \sin\psi, \\ z &= \rho . \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} . \cos\psi, \end{aligned} \right.$$

le rapport k restant disponible, et pouvant être choisi de manière à faciliter la solution que l'on cherche.

Quand on prend $k = 1$, d'où $k' = 0$, on a

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \rho \sin\theta, \\ y &= \rho \cos\theta \sin\psi, \\ z &= \rho \cos\theta \cos\psi. \end{aligned} \right.$$

C'est le système habituel des coordonnées sphériques, dans lequel la longitude ψ est seule un paramètre thermométrique. Les sphères concentriques et les cônes de latitude forment bien deux familles de surfaces isothermes, mais ρ et θ ne sont pas leurs paramètres thermométriques.

Les diverses propositions établies dans cette leçon donnent lieu à deux observations importantes. Il résulte des §§ 97 et 101, que les rapports $\frac{A}{k}$ et $\frac{B}{k}$ quand $k = 0$, $\frac{B_1}{k'}$ et $\frac{C_1}{k'}$ quand $k' = 0$, deviennent $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$; mais ces vraies valeurs de fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ ne sont ni A, ni B, ni B_1, ni C_1. D'ailleurs, si l'on fait subir à la fonction $F = \sin\varepsilon$, ou $F = \cos\varepsilon$, l'épreuve du caractère général, défini par la septième leçon, on trouve que le premier membre de l'équation (15), au § 72, se réduit à $g\,\frac{1}{\sin(\alpha \pm \beta)}$; le coefficient g étant ∓ 1 dans le premier cas, $+1$ dans le second. Or il est impossible de ramener la fraction $\frac{1}{\sin(\alpha \pm \beta)}$ à la forme $\sin[G - (\alpha \pm \beta)]$, ou $\cos[G - (\alpha \pm \beta)]$, avec une constante finie G, soit réelle, soit imaginaire. Ainsi les fonctions $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$ n'appartiennent pas à la classe des (A_i, B_i, C_i) : elles n'en ont pas le caractère essentiel ; elles n'en sont pas des variétés.

Le système ellipsoïdal (6) et le système sphérique (25) se confondent, se superposent, sont en quelque sorte tangents *à l'infini*; c'est-à-dire pour les valeurs du paramètre thermométrique γ voisines de ses limites $\pm \varpi$, et pour les très-grandes valeurs du rayon ρ. Autrement : tous les hyperboloïdes (6) ont leurs cônes asymptotes (25), et la famille des ellipsoïdes s'approche asymptotiquement de la sphère d'un rayon infini. Ce dernier genre d'asymptotisme diffère du premier, en ce que les familles de cônes (25) changent, comme celles des hyperboloïdes (6), d'un système à un autre, ou avec la valeur du rapport k, tandis que la sphère asymptote des ellipsoïdes reste la même. Cette propriété que possède la sphère, d'appartenir en quelque sorte à tous les systèmes ellipsoïdaux, est d'un grand secours dans les applications, comme guide et comme moyen de découvertes.

DIXIÈME LEÇON.

Problème de la transformation des transcendantes et des fonctions elliptiques.— Solution générale découverte par Jacobi. — Vérification de cette solution.—Nouveau module.—Formules des nouvelles fonctions inverses.

§ CVI.

PROBLÈME DE LA TRANSFORMATION.

Le système des fonctions inverses, directes et conjuguées, qui dépendent d'une valeur déterminée et fixe du rapport k, est maintenant défini aussi complétement que possible. Mais si l'on considère l'ensemble des systèmes coordonnés correspondants à toutes les valeurs de k comprises entre zéro et l'unité, on doit se demander s'il n'existe pas entre eux des liaisons qui puissent permettre de passer d'un de ces systèmes à un autre. La solution générale du problème de la transformation des transcendantes et des fonctions elliptiques, découverte par Jacobi, répond directement à la question, et il importe de la développer ici.

Nous conserverons la notation des (A_i, B_i, C_i), tant pour éviter la traduction nouvelle d'un grand nombre de formules établies précédemment, que pour interpréter plus facilement les résultats obtenus, au point de vue des applications à la géométrie et à la physique mathématique. Toutefois rien n'empêche de donner au rapport $k = \frac{b}{c}$ le nom consacré de *module*.

La formule $\frac{dA}{d\varepsilon} = BC$, jointe aux relations qui existent entre les trois fonctions (A, B, C), donne le paramètre thermométrique ε sous la forme

$$(1)\qquad \varepsilon = \int_0^{A} \frac{dA}{\sqrt{k^2 - A^2}\sqrt{1 - A^2}};$$

nous écrirons la fonction inverse A de cette manière $A(\varepsilon; k)$, quand il sera nécessaire de la distinguer d'une fonction semblable ayant un autre module; pour le moment, appelons x la variable de l'intégrale (1).

Le problème de la transformation des transcendantes elliptiques consiste à trouver une fonction rationnelle y de x, qui satisfasse à l'équation

$$(2)\qquad \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}\sqrt{1 - x^2}} = M \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{l^2 - y^2}\sqrt{1 - y^2}};$$

M et l étant des constantes qu'il faut assigner en même temps que la fonction. Le premier membre étant ε, on aura

$$x = A(\varepsilon; k) \quad \text{et} \quad y = A\left(\frac{\varepsilon}{M}; l\right);$$

c'est-à-dire que la solution trouvée donnera la fonction inverse A de $\frac{\varepsilon}{M}$ pour le module l, à l'aide de la fonction inverse A de ε pour le module k. On aura donc une formule de transformation entre fonctions inverses appartenant à des modules ou à des systèmes différents. On conçoit que le problème dont il s'agit doit avoir un nombre infini de solutions; leur recherche est facilitée par le théorème suivant :

§ CVII.

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE.

Théorème. — Si l'on a obtenu trois polynômes U, V, T, ne contenant que des puissances entières et positives de x, et qui vérifient l'équation

$$(3)\qquad (l^2 V^2 - U^2)(V^2 - U^2) = (k^2 - x^2)(1 - x^2) T^2,$$

le troisième polynôme T sera nécessairement égal à l'expression

$$\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right),$$

déduite des deux autres, multipliée par un facteur constant.

Démonstration. — On peut admettre que U et V sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils ne sont plus divisibles par un même polynôme en x. Conséquemment les quatre polynômes

$$(4)\qquad (lV + U),\quad (lV - U),\quad (V + U),\quad (V - U),$$

diviseurs du premier membre (3), sont aussi premiers entre eux. De là résulte que chaque facteur simple de T (de la forme $ax + b$), qui est double dans T^2, sera aussi double dans celui des polynômes (4) qu'il divisera. Soient p, et p' égal ou inférieur à p, les degrés de U et V; $4p$ sera le degré du premier membre (3), et $2p - 2$ celui de T; T aura donc $2p - 2$ facteurs, lesquels seront doubles dans les polynômes (4).

D'un autre côté, ces derniers polynômes donnent, par la différentiation,

$$(lV \pm U)\frac{dU}{dx} - U\frac{d(lV \pm U)}{dx} = l\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right),$$
$$(V \pm U)\frac{dU}{dx} - U\frac{d(V \pm U)}{dx} = V\frac{dV}{dx} - U\frac{dU}{dx};$$

identités d'où résulte que tout facteur double dans l'un de ces polynômes, lequel divise sa dérivée, divisera nécessairement l'expression

$$\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right),$$

que nous désignerons par W. Ainsi W sera divisible par tous les facteurs de T, et son degré q devra être au moins $2p-2$. Mais les degrés de U et V étant p, et p' égal ou inférieur à p : 1° si $p'=p$, les termes dont l'exposant est $2p-1$ seront égaux dans les deux parties de la différence W, et se détruiront, d'où $q=2p-2$; 2° si $p'=p-1$, il n'y aura pas de disparition analogue, et q sera $p+p-2$, ou encore $2p-2$; 3° si p' était moindre que $p-1$, $q=p+p'-1$ serait moindre que $2p-2$, ce qui ne saurait être. Donc p' sera égal, ou à p, ou à $p-1$, et dans les deux cas le degré de W sera $2p-2$. Donc enfin l'expression W et le polynôme T, qui ont le même degré et les mêmes diviseurs, ne peuvent différer que par un facteur constant.

Corollaire. — Puisque l'on doit avoir identiquement

$$T = M\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right),$$

si l'on substitue cette valeur dans l'équation (3), on en déduit facilement

$$\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{1-x^2}} = M\int\frac{d\left(\frac{U}{V}\right)}{\sqrt{l^2-\left(\frac{U}{V}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{U}{V}\right)^2}};$$

donc, si l'on pose $y=\frac{U}{V}$, et que U soit nul pour $x=0$, sans que V le soit, on aura une solution du problème de la transformation. Puis, pour déterminer la constante M, on fera $x=0$ dans l'identité qui donne T, d'où

$$M = \frac{T_0}{\left(V\frac{dU}{dx}\right)_0}.$$

§ CVIII.

CONSÉQUENCE D'UNE DES FORMULES D'EULER.

Avant d'aborder la solution générale donnée par Jacobi, il y a encore une proposition à démontrer. Continuant de désigner par $A(\varepsilon)$ la fonction inverse dont le module est k, la première des formules d'Euler, au § 41, en posant

$$\alpha+\beta=\sigma,\quad \alpha-\beta=\delta,$$

devient

$$(5)\qquad A\binom{\sigma}{\delta}=k\,\frac{A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)\pm A(\beta)B(\alpha)C(\alpha)}{k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)}.$$

On en déduit successivement

$$[k\mp A(\sigma)][k\mp A(\delta)]=k^2\mp k[A(\sigma)+A(\delta)]+A(\sigma)A(\delta)$$
$$=k^2\left[1\mp\frac{2A(\alpha)B(\beta)C(\beta)}{k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)}+\frac{A^2(\alpha)B^2(\beta)C^2(\beta)-A^2(\beta)B^2(\alpha)C^2(\alpha)}{[k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)]^2}\right].$$

Or, en exprimant le numérateur de la dernière fraction en A seulement, à l'aide des relations

$$(6)\qquad B^2=k^2-A^2,\quad C^2=1-A^2,$$

on reconnaît tout de suite, comme au § 70, que ce numérateur est le produit de $[A^2(\alpha)-A^2(\beta)]$ par le dénominateur de la fraction (5), ce qui donne, après réduction,

$$[k\mp A(\sigma)][k\mp A(\delta)]$$
$$=k^2\,\frac{k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)\mp 2A(\alpha)B(\beta)C(\beta)+A^2(\alpha)-A^2(\beta)}{k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)}$$
$$=k^2\,\frac{B^2(\beta)+A^2(\alpha)C^2(\beta)\mp 2B(\beta)A(\alpha)C(\beta)}{k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)}$$
$$=k^2\,\frac{[B(\beta)\mp A(\alpha)C(\beta)]^2}{k^2-A^2(\alpha)A^2(\beta)},$$

En s'aidant encore des relations (6), et rappelant la première formule (13) du § 42, qui est

$$(7) \qquad \mathrm{A}(\varpi - \varepsilon) = \frac{\mathrm{B}(\varepsilon)}{\mathrm{C}(\varepsilon)},$$

on aura définitivement

$$(8) \qquad \frac{\left[1 \mp \frac{\mathrm{A}(\alpha)}{\mathrm{A}(\varpi - \beta)}\right]^2}{1 - \frac{\mathrm{A}^2(\alpha)\,\mathrm{A}^2(\beta)}{k^2}} = \frac{[k \mp \mathrm{A}(\delta)][k \mp \mathrm{A}(\sigma)]}{\mathrm{B}^2(\beta)},$$

formule qu'il s'agissait d'établir.

§ CIX.

ÉNONCÉ DE LA SOLUTION DE JACOBI.

Soit maintenant $p = 4j \pm 1$ un nombre entier, impair et quelconque; désignons par i la fraction $\frac{\varpi}{p}$, on aura

$$\mathrm{A}(pi) = \mathrm{A}(\varpi) = k,$$

et l'on se rappellera que, d'après le § 42,

$$(9) \qquad \mathrm{A}(2\varpi \pm \varepsilon) = \mp \mathrm{A}(\varepsilon), \quad \mathrm{A}(4\varpi \pm \varepsilon) = \pm \mathrm{A}(\varepsilon).$$

Cela posé, x étant $\mathrm{A}(\varepsilon)$, la solution de Jacobi est donnée par l'équation

$$(10) \qquad 1 - \frac{y}{l} = \left(1 \mp \frac{x}{k}\right) \frac{\left[1 \pm \frac{x}{\mathrm{A}(p-2)i}\right]^2}{1 - \frac{x^2\,\mathrm{A}^2(2i)}{k^2}} \; \frac{\left[1 \mp \frac{x}{\mathrm{A}(p-4)i}\right]^2}{1 - \frac{x^2\,\mathrm{A}^2(4i)}{k^2}} \ldots,$$

où le dernier facteur est essentiellement

$$\frac{\left[1 - \frac{x}{\mathrm{A}(i)}\right]^2}{1 - \frac{x^2\,\mathrm{A}^2(p-1)i}{k^2}};$$

les signes alternatifs supérieurs ayant lieu si p est de la forme $4j+1$, et les signes inférieurs si ce nombre est de la forme $4j-1$, de telle sorte qu'au dernier facteur il y ait toujours le signe $-$. Il s'agit de faire voir que la valeur de y, donnée par cette équation (10), vérifie réellement la relation (2), avec une constante M et un module l convenablement déterminés.

§ CX.

TRANSFORMATION DE CET ÉNONCÉ.

La formule (8), en y faisant $\alpha=\varepsilon$, $\beta=2ni$, et $\mathrm{A}(\varepsilon)=x$, devient

$$(11)\quad \frac{\left[1\mp\frac{x}{\mathrm{A}(p-2n)i}\right]^2}{1-\frac{x^2\mathrm{A}^2(2ni)}{k^2}}=\frac{[k\mp\mathrm{A}(\varepsilon-2ni)][k\mp\mathrm{A}(\varepsilon+2ni)]}{\mathrm{B}^2(2ni)};$$

et si l'on substitue à chaque fraction du second membre de l'équation (10) sa valeur transformée à l'aide de la formule (11), on parviendra toujours à mettre cette équation (10) sous la forme importante

$$(12)\quad 1-\frac{y}{l}=\frac{[k\mp\mathrm{A}(\varepsilon)][k\mp\mathrm{A}(\varepsilon+4i)][k\mp\mathrm{A}(\varepsilon+8i)]\ldots[k\mp\mathrm{A}(\varepsilon+4(p-1)i)]}{k\mathrm{B}^2(2i)\mathrm{B}^2(4i)\ldots\mathrm{B}^2(p-1)i}.$$

Deux exemples ne laisseront aucun doute sur la généralité de cette transformation. Soit $p=5=4.1+1$, l'équation posée (10) est

$$1-\frac{y}{l}=\left(1-\frac{x}{k}\right)\frac{\left[1+\frac{x}{\mathrm{A}(3i)}\right]^2}{1-\frac{x^2\mathrm{A}^2(2i)}{k^2}}\cdot\frac{\left[1-\frac{x}{\mathrm{A}(i)}\right]^2}{1-\frac{x^2\mathrm{A}^2(4i)}{k^2}},$$

et, par un double usage de (11), le second membre devient

$$\frac{[k-\mathrm{A}(\varepsilon)][k+\mathrm{A}(\varepsilon-2i)][k+\mathrm{A}(\varepsilon+2i)][k-\mathrm{A}(\varepsilon-4i)][k-\mathrm{A}(\varepsilon+4i)]}{k\mathrm{B}^2(2i).\mathrm{B}^2(4i)}.$$

Or, en ajoutant à ε, $10i$ ou 2ϖ dans le second et le troisième facteur du numérateur, $20i$ ou 4ϖ dans le quatrième, et ayant égard aux relations (9), on peut, en ordonnant les facteurs, mettre la valeur précédente sous la forme

$$(13)\quad \frac{[k-A(\varepsilon)]\,[k-A(\varepsilon+4i)]\,[k-A(\varepsilon+8i)]\,[k-A(\varepsilon+12i)]\,[k-A(\varepsilon+16i)]}{k\,B^2(2i).B^2(4i)}.$$

Soit $p=7=4.2-1$; le second membre de l'équation (10) sera

$$\left(1+\frac{x}{k}\right).\frac{\left[1-\frac{x}{A(5i)}\right]^2}{1-\frac{x^2A^2(2i)}{k^2}}.\frac{\left[1+\frac{x}{A(3i)}\right]^2}{1-\frac{x^2A^2(4i)}{k^2}}.\frac{\left[1-\frac{x}{A(i)}\right]^2}{1-\frac{x^2A^2(6i)}{k^2}};$$

par un triple usage de la formule (11), cette expression prend la forme d'une seule fraction, ayant pour dénominateur

$$k.B^2(2i).B^2(4i).B^2(6i),$$

et pour numérateur le produit des sept facteurs

$$\begin{gathered}[k+A(\varepsilon)],\\ [k-A(\varepsilon-2i)],\quad [k-A(\varepsilon+2i)],\\ [k+A(\varepsilon-4i)],\quad [k+A(\varepsilon+4i)],\\ [k-A(\varepsilon-6i)],\quad [k-A(\varepsilon+6i)].\end{gathered}$$

Or, ajoutant à ε, $14i$ ou 2ϖ, dans les 2^e, 3^e, 6^e et 7^e, $28i$ ou 4ϖ dans le 4^e, et ayant égard aux relations (9), on peut écrire et ordonner ces facteurs de la manière suivante :

$$(14)\quad \begin{gathered}[k+A(\varepsilon)],\\ [k+A(\varepsilon+4i)],\quad [k+A(\varepsilon+8i)],\\ [k+A(\varepsilon+12i)],\quad [k+A(\varepsilon+16i)],\\ [k+A(\varepsilon+20i)],\quad [k+A(\varepsilon+24i)];\end{gathered}$$

et leur produit a la forme annoncée (12).

§ CXI.

DÉDUCTION DE y.

D'après les formes (12), (13), (14), il est évident que le second membre de l'équation (12) reste le même, et que conséquemment y ne change pas, quand on augmente la variable ε de $4i$: car le premier facteur devient le deuxième, le deuxième devient le troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui devient $[k \mp A(\varepsilon + 4\varpi)]$ ou $[k \mp A(\varepsilon)]$, c'est-à-dire le premier. Or, si l'on fait $x = 0$ dans l'équation posée (10), on a

$$1 - \frac{y}{l} = 1, \quad \text{d'où} \quad y = 0;$$

donc y sera nul, non-seulement pour $x = 0 = A(0)$, mais aussi pour $x = A(4i)$, $A(8i)$, $A(12i)$,..., $A[4(p-1)i]$, ou, ce qui est la même chose d'après les relations (9), pour $x = \pm A(2i)$, $\pm A(4i)$, $\pm A(6i)$,..., $\pm(p-1)i$.

D'après cela, si l'on résout l'équation (10) par rapport à $\frac{y}{l}$, sa valeur sera le produit d'une constante par une fraction, dont le dénominateur sera évidemment le même qu'au second membre de (10), et dont le numérateur sera le produit des p facteurs

$$x, \quad \left[1 - \frac{x}{A(2i)}\right], \quad \left[1 + \frac{x}{A(2i)}\right],$$
$$\left[1 - \frac{x}{A(4i)}\right], \quad \left[1 + \frac{x}{A(4i)}\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[1 - \frac{x}{A(p-1)i}\right], \quad \left[1 + \frac{x}{A(p-1)i}\right].$$

C'est-à-dire que l'on aura, en employant une notation connue,

$$(15)\qquad \frac{y}{l}=\frac{1}{m}\frac{x}{k}\frac{\Pi\left(1-\frac{x^2}{A^2(2ni)}\right)}{\Pi\left(1-\frac{x^2A^2(2ni)}{k^2}\right)},$$

m étant une constante qu'il s'agit de déterminer.

§ CXII.

VALEUR DE LA CONSTANTE m.

Or si, dans l'équation (10), on fait

$$\varepsilon=\pm\varpi,\quad \text{d'où}\quad x=A(\pm\varpi)=\pm k,$$

le second membre s'annule, et l'on a $y=l$; ces valeurs correspondantes étant substituées dans l'équation (15), donneront, en changeant les signes des facteurs du produit Π placé au numérateur, facteurs dont le nombre $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ est pair ou impair suivant que $p=4j\pm1$, et en ayant égard aux relations (6), d'abord, dans les deux cas,

$$m=\Pi\frac{1}{A^2(2ni)}\frac{B^2(2ni)}{C^2(2ni)},$$

et ensuite, en remarquant que

$$\frac{B(2ni)}{C(2ni)}=A(p-2n)i,$$

d'après la formule (7), plus simplement

$$(16)\qquad m=\frac{\Pi A^2(p-2n)i}{\Pi A^2(2ni)}.$$

§ CXIII.

DÉDUCTION DE $\sqrt{1-\left(\frac{y}{l}\right)^2}$.

Si l'on écrit une seconde fois l'équation (10), en changeant le signe de x, et par suite celui de y d'après (15), si l'on multiplie, membre à membre, la nouvelle équation par la première, enfin si l'on extrait la racine carrée du produit, il viendra

$$(17)\quad \sqrt{1-\left(\frac{y}{l}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}\,\frac{\Pi\left(1-\frac{x^2}{A^2(p-2n)i}\right)}{\Pi\left(1-\frac{x^2A^2(2ni)}{k^2}\right)}.$$

§ CXIV.

NOUVEAU MODULE.

On peut disposer du module l, encore indéterminé, de telle sorte que si l'on change $\frac{x}{k}$ en $\frac{1}{x}$ dans le second membre de l'équation (15), $\frac{y}{l}$ se change en $\frac{1}{y}$. Soit d'abord $\frac{1}{u}$ ce que devient le second membre par le changement de $\frac{x}{k}$ en $\frac{1}{x}$, on aura

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{mx}\Pi\frac{\left(1-\frac{k^2}{x^2A^2(2ni)}\right)}{\left(1-\frac{A^2(2ni)}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{k^{p-1}}{mx\,\Pi A^4(2ni)}\Pi\frac{\left(1-\frac{x^2A^2(2ni)}{k^2}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{A^2(2ni)}\right)},$$

et multipliant par l'équation (15), membre à membre, il en résultera

$$\frac{y}{lu} = \frac{k^{p-2}}{m^2 \Pi A^4 (2ni)} = \frac{k^{p-2}}{\Pi A^4 (p-2n)i},$$

d'après la valeur (16) de m; d'où il suit que u sera égal à y, si

(18) $$l = \frac{\Pi A^4 (p-2n)i}{k^{p-2}}.$$

§ CXV.

DÉDUCTION DE $\sqrt{1-y^2}$.

Avec cette valeur de l, on peut changer à la fois $\frac{x}{k}$ en $\frac{1}{x}$, et $\frac{y}{l}$ en $\frac{1}{y}$, non-seulement dans l'équation (15), mais aussi dans l'équation (17), qui peut être considérée comme étant une conséquence de la première. Par ce double changement, l'équation (17) devient, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{-1}$:

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Pi \frac{1 - \dfrac{k^2}{x^2 A^2 (p-2n)i}}{1 - \dfrac{A^2 (2ni)}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \frac{k^{p-1}}{\Pi A^2 (2ni) . \Pi A^2 (p-2n)i} \Pi \frac{1 - \dfrac{x^2 A^2 (p-2n)i}{k^2}}{1 - \dfrac{x^2}{A^2 (2ni)}},$$

puis, multipliant par l'équation (15), membre à membre, on aura simplement

(19) $$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2} \frac{\Pi \left(1 - \dfrac{x^2 A^2 (p-2n)i}{k^2}\right)}{\Pi \left(1 - \dfrac{x^2 A^2 (2ni)}{k^2}\right)},$$

car, d'après la valeur (16) de m et la valeur (18) de l, on a

$$\frac{k^{p-2}}{m\,\Pi\, A^2(2\,ni).\Pi\, A^2(p-2\,n)i} = \frac{1}{l}.$$

§ CXVI.

VÉRIFICATION DE LA SOLUTION.

Ainsi, le groupe complet des équations (15), (17), (19), avec les valeurs (16) de m, (18) de l, est une conséquence nécessaire, soit de l'équation posée (10), soit de l'équation déduite (15). Or, si l'on pose

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{l}{mk}\,x\,\Pi\left(1-\frac{x^2}{A^2(2\,ni)}\right) = U,\\ &\Pi\left(1-\frac{x^2 A^2(2\,ni)}{k^2}\right) = V,\\ &\frac{l}{k}\,\Pi\left(1-\frac{x^2}{A^2(p-2\,n)i}\right) = Q,\\ &\Pi\left(1-\frac{x^2 A^2(p-2\,n)i}{k^2}\right) = Q',\end{aligned}\right.$$

les trois équations de ce groupe sont, plus simplement,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &y = \frac{U}{V},\\ &\sqrt{l^2-y^2} = \sqrt{k^2-x^2}\,.\,\frac{Q}{V},\\ &\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2}\,.\,\frac{Q'}{V};\end{aligned}\right.$$

mettant dans les deux dernières la valeur de y, donnée par la première, multipliant ces deux équations l'une par l'autre, élevant au carré, et chassant les dénominateurs, on aura

$$(22)\quad (l^2V^2-U^2)(V^2-U^2) = (k^2-x^2)(1-x^2)(QQ')^2.$$

C'est-à-dire que les polynômes U, V, $T = QQ'$, (20), vérifient l'équation (3) du théorème primitif; et comme, pour $x = 0$, on a

$$V = 1, \quad \frac{dU}{dx} = \frac{l}{mk}, \quad Q = \frac{l}{k}, \quad Q' = 1,$$

il résulte du corollaire qui suit ce théorème qu'en prenant la constante M de l'équation (2) égale à

$$\frac{(QQ')_0}{\left(V\frac{dU}{dx}\right)_0} = \frac{\left(\frac{l}{k}\right)}{\left(\frac{l}{mk}\right)} = m,$$

la valeur (15) de y, avec le module l (18), donne une solution du problème de la transformation des transcendantes et des fonctions elliptiques.

Cette solution, mémorable dans l'histoire des mathématiques, est d'une généralité plus grande encore qu'elle ne paraît au premier abord : car les facteurs des constantes m et l sont des fonctions algébriques assignables du nombre $A(i)$, qui, pour un même entier p, a, comme nous le verrons, plusieurs valeurs également admissibles. Si l'on adopte pour i, ainsi que nous l'avons supposé, la fraction $\frac{\varpi}{p}$, ϖ étant le même nombre que dans les leçons précédentes, il en résulte que le nouveau module l est moindre que l'ancien k, car la valeur (18) peut se mettre sous la forme

$$l = k^p \Pi \left(\frac{A(p-2n)i}{k}\right)^4,$$

le nombre des facteurs du produit Π étant $\frac{p-1}{2}$; or k est moindre que l'unité, tandis que les $A(p-2n)i$, tous réels, ne sauraient surpasser le module k. Pour d'autres valeurs du nombre $A(i)$, le contraire a lieu, c'est-à-dire que le nouveau module peut surpasser l'ancien ; ce qui donne deux genres de transformation des transcendantes et des fonctions elliptiques, en quelque sorte opposés, et dont l'étude comparative fera l'objet de la prochaine leçon.

§ CXVII.

FORMULES DES NOUVELLES FONCTIONS INVERSES.

L'introduction du complément $(\varpi' \sqrt{-1} - \varepsilon)$ appartenant au groupe (A, B, C) et qui est défini au § 78, permet d'écrire le groupe des équations (15), (17) et (19) sous la forme suivante :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}\left(\frac{\varepsilon}{m}; l\right) &= m\,\mathrm{A}(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{\mathrm{A}^2(\varepsilon) - \mathrm{A}^2(2ni)}{\mathrm{A}^2(\varepsilon) - \mathrm{co}\,\mathrm{A}^2(2ni)},\\ \mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{m}; l\right) &= m\,\mathrm{B}(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{\mathrm{B}^2(\varepsilon) - \mathrm{B}^2(p-2n)i}{\mathrm{B}^2(\varepsilon) - \mathrm{co}\,\mathrm{B}^2(2ni)},\\ \mathrm{C}\left(\frac{\varepsilon}{m}; l\right) &= m\,\mathrm{C}(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{\mathrm{C}^2(\varepsilon) - \mathrm{co}\,\mathrm{C}^2(p-2n)i}{\mathrm{C}^2(\varepsilon) - \mathrm{co}\,\mathrm{C}^2(2ni)}; \end{aligned}\right.$$

comme on le vérifiera sans peine à l'aide de la première ligne du tableau (25), § 78, des relations (6) et des valeurs de m et de l.

La simplicité et la symétrie remarquables de ces formules (23) résultent de la notation que nous avons employée. Elles nous serviront d'excuse si l'on ne trouve pas qu'en rejetant la fonction inverse intermédiaire $\mathcal{A}\varepsilon$, § 96, appelée l'*amplitude* de ε, nous ayons simplifié l'exposition de la découverte de Jacobi.

Les applications qui termineront le Cours actuel rendaient indispensable l'emploi d'une notation nouvelle, fondée sur les définitions déduites de la considération des surfaces isothermes. D'ailleurs, si l'introduction de l'amplitude a réellement simplifié l'évaluation des transcendantes elliptiques, elle a certainement compliqué l'étude de leurs fonctions inverses. Ces fonctions étant représentées par des sinus et des cosinus, un tel rapprochement, en quelque sorte hétérogène, a pu retarder la découverte de leurs propriétés caractéristiques. Et même, en ce qui concerne les transcendantes, on peut douter que les amplitudes soient préférables aux paramètres thermométriques, si l'on en juge par la vérification pénible, que Poisson a faite, des deux intégrales définies multiples immédiatement posées aux §§ 90 et 104.

ONZIÈME LEÇON.

Double solution du problème de la transformation. — Formules et caractères des deux transformations. — Théorème sur les transformations d'une fonction inverse et de sa conjuguée. — Nouvelle solution de la multiplication des transcendantes.

§ CXVIII.

NOUVELLE NOTATION POUR LES ϖ ET ϖ'.

La solution générale du problème de la transformation des transcendantes et des fonctions elliptiques, posée et vérifiée dans la dixième leçon, conduit à des conséquences importantes que nous allons développer dans celle-ci. Afin de faciliter les renvois, au lieu de commencer une nouvelle série de numéros d'ordre pour les formules et les tableaux, nous prolongerons celle de la dernière séance.

Obligés que nous sommes maintenant de considérer simultanément les fonctions inverses de plusieurs systèmes, il y a nécessité de désigner autrement les nombres ϖ et ϖ' qui changent d'un système à un autre. Prenant toujours une petite lettre pour le module, et la même lettre accentuée pour son complémentaire, nous représenterons par les grandes lettres correspondantes les nombres ϖ et ϖ' qui appartiennent à leur système. Ainsi, dans le système primitif que transforme la dixième leçon, k et k' étant les deux modules complémentaires, K et K$'$ remplaceront ϖ et ϖ', et les valeurs de ces nombres dans le nouveau système, dont l et l' sont les modules, seront L et L$'$.

§ CXIX.

MULTIPLICITÉ DES VALEURS DE A(i).

Les facteurs qui composent les constantes m (16) et l (18), ainsi que les coefficients et les dénominateurs qui entrent dans les produits Π du groupe (15), (17), (19) de la transformation, sont tous de la forme $A^2(qi)$, q étant un nombre entier. Or, en se servant de la formule d'Euler (5) et des relations (6), il sera toujours possible d'exprimer algébriquement tous les A (qi), à l'aide de A (i) seulement; si donc ce dernier nombre admet plusieurs valeurs différentes, à chacune d'elles correspondra une transformation spéciale et distincte. Cette multiplicité existe effectivement. Le paramètre i est déterminé par l'équation

$$(24) \qquad A(pi) = k,$$

et quand cette équation est satisfaite, la propriété dont jouit l'équation (12), de ne pas changer quand ε augmente de $4i$, et d'où découle toute la vérification, est essentiellement conservée. Il s'agit de résoudre l'équation (24) par rapport à la quantité i.

La fonction inverse A est égale à k, non-seulement quand ε est égal à ϖ ou K, mais aussi quand on ajoute à K des multiples des deux périodes, réelle et imaginaire, 4ϖ ou $4K$, $2\varpi'\sqrt{-1}$ ou $2K'\sqrt{-1}$ [tableau (6), § 61]; on aura donc

$$A\left[(4I+1)K + 2JK'\sqrt{-1}\right] = A(pi) = k,$$

I et J étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs; d'où

$$(25) \qquad i = \frac{(4I+1)K + 2JK'\sqrt{-1}}{p}.$$

Mais au nombre infini des valeurs de i, données par cette équation (25), ne correspondent qu'un nombre limité de valeurs de $A(i)$, par suite de la double périodicité de la fonction inverse, et ce nombre ne saurait surpasser p^2.

§ CXX.

TRANSFORMATION PAR i RÉEL.

Si l'on fait $I=0$, $J=0$, on a $i=\frac{K}{p}$, valeur réelle. Conservant les lettres m et l, pour désigner le coefficient et le nouveau module, dans les formules (15), (17) et (19), s'appliquant à tous les $A(i)$ possibles, nous désignerons par μ et h les valeurs que prennent m et l quand $i=\frac{K}{p}$, et les formules de la transformation qui correspond à cette valeur réelle particulière seront les suivantes :

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h}A\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h\right)=\frac{1}{\mu\Phi}\frac{A(\varepsilon)}{k}\Pi\left[1-\frac{A^2(\varepsilon)}{A^2(2ni)}\right],\\
&\frac{1}{h}B\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h\right)=\frac{1}{\Phi}\frac{B(\varepsilon)}{k}\Pi\left[1-\frac{A^2(\varepsilon)}{A^2(p-2n)i}\right],\\
&C\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h\right)=\frac{C(\varepsilon)}{\Phi}\Pi\left[1-\frac{A^2(\varepsilon)A^2(p-2n)i}{k^2}\right];\\
&\Phi=\Pi\left[1-\frac{A^2(\varepsilon)A^2(2ni)}{k^2}\right],\\
&\mu=\Pi\frac{A^2(p-2n)i}{A^2(2ni)},\qquad h=k^p\,\Pi\left(\frac{A(p-2n)i}{k}\right)^4;
\end{aligned}\right.$$

où i est spécialement $\frac{K}{p}$, Φ le dénominateur commun, et où les A sans désignation de module appartiennent au primitif k.

§ CXXI.

TRANSFORMATION PAR i IMAGINAIRE.

Parmi les autres valeurs de i, il en est une qui, bien qu'imaginaire, conduit aux formules, pareillement réelles, d'une seconde transformation, dont les rapports avec la première sont l'objet principal de l'étude actuelle. Le nombre $p = 4j \pm 1$ donnant $4(\pm j) + 1 = \pm p$, on prend dans (25) $I = \pm j$, $2J = 1 - p$; d'où $i = \pm K - K'\sqrt{-1} + \frac{K'}{p}\sqrt{-1}$, ou bien, en posant $\frac{K'}{p} = i'$:

$$(27) \qquad i = \pm K + (i' - K')\sqrt{-1}.$$

Telle est la valeur de i qu'il s'agit de substituer dans les formules générales.

Par cette valeur, on aura

$$(A^2, B^2, \text{ ou } C^2)(2ni) = (A^2, B^2, \text{ ou } C^2)(2ni' - 2nk')\sqrt{-1},$$

puisque $(A, B, \text{ ou } C)(\varepsilon \pm 2nK)$ ne peuvent différer de $(A, B, \text{ ou } C)(\varepsilon)$ que par le signe. Si l'on rapproche les tableaux (5), § 60, et (13), § 53, on établit facilement les relations

$$(28) \qquad \begin{cases} A(\varepsilon\sqrt{-1}) = k\sqrt{-1}\,\dfrac{A'(\varepsilon)}{B'(\varepsilon)}, \\ B(\varepsilon\sqrt{-1}) = \dfrac{kk'}{B'(\varepsilon)}, \\ C(\varepsilon\sqrt{-1}) = k'\,\dfrac{C'(\varepsilon)}{B'(\varepsilon)}; \end{cases}$$

en les appliquant au cas actuel, et supprimant $(-2nK')$ dans les carrés $(A'^2, B'^2, \text{ ou } C'^2)(2ni' - 2nK')$, il vient définitivement, quand i a la valeur (27) :

$$(29)\left\{\begin{aligned} A^2(2ni) &= -k^2\frac{A'^2(2ni')}{B'^2(2ni')},\\ A^2(p-2n)i &= \frac{B^2(2ni)}{C^2(2ni)} = \frac{k^2}{C'^2(2ni')} = k^2\frac{A'^2(p-2n)i'}{B'^2(2ni')};\end{aligned}\right.$$

la dernière forme résulte de l'équation (7) appliquée aux fonctions conjuguées.

Désignons par λ et g les valeurs de la constante m (16) et du module l (18) dans le cas actuel; les relations (29) donneront d'abord

$$l = \frac{\Pi A^4(p-2n)i}{k^{p-2}} = \frac{1}{k^{p-2}}\Pi\left(\frac{k}{C'(2ni')}\right)^4 = g,$$

et ensuite

$$m = \Pi\frac{A^2(p-2n)i}{A^2(2ni)} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\Pi\frac{A'^2(p-2n)i'}{A'^2(2ni')},$$

$\left(\frac{p-1}{2}\right)$ étant le nombre des facteurs du produit Π. Or il faut supprimer ici le facteur $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$. En effet, la démonstration commencée au § 109 suppose i réel, alors le premier membre de l'équation posée (10) est bien $1-\frac{y}{l}$; il doit être $1\mp\frac{y}{l}$ quand i est imaginaire : car, en vue de tous les cas, il n'est pas nécessaire d'assigner d'avance le signe de $\frac{y}{i}$ au premier membre de l'équation (10), pour que l'on puisse déduire la forme de l'équation (15); et lorsque ensuite on veut déterminer m, constante qui doit être essentiellement positive, d'après le rôle qu'elle doit jouer dans l'équation (2), si $p=4j-1$, on fait $x=-k$ au second membre de (15), lequel devient positif quand i est réel, négatif quand i est imaginaire ; ce qui apprend qu'à $x=-k$ doit correspondre $y = l$ dans le premier cas, et $y = -l$ dans le second.

D'après cela, si l'on achève de substituer les valeurs (29) dans les équations (15), (17) et (19), les formules de la seconde transformation seront

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{g}\mathrm{A}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) = \frac{1}{\lambda\Theta}\frac{\mathrm{A}(\varepsilon)}{k}\Pi\left[1 + \frac{\mathrm{A}^2(\varepsilon)\mathrm{B}'^2(2ni')}{k^2\mathrm{A}'^2(2ni')}\right],\\
&\frac{1}{g}\mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) = \frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{B}(\varepsilon)}{k}\Pi\left[1 - \frac{\mathrm{A}^2(\varepsilon)\mathrm{C}'^2(2ni')}{k^2}\right],\\
&\mathrm{C}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) = \frac{1}{\Theta}\mathrm{C}(\varepsilon)\Pi\left[1 - \frac{\mathrm{A}^2(\varepsilon)}{\mathrm{C}'^2(2ni')}\right],\\
&\Theta = \Pi\left[1 + \mathrm{A}^2(\varepsilon)\frac{\mathrm{A}'^2(2ni')}{\mathrm{B}'^2(2ni')}\right],\\
&\lambda = \Pi\frac{\mathrm{A}'^2(p-2n)i}{\mathrm{A}'^2(2ni')}, \quad g = \frac{1}{k^{p-2}}\Pi\left(\frac{k}{\mathrm{C}'(2ni')}\right)^4,
\end{aligned}
\right.
$$

i' étant $\frac{\mathrm{K}'}{p}$, et Θ le dénominateur commun. On remarquera qu'ici les produits Π ne peuvent s'annuler pour aucune valeur réelle de $\mathrm{A}(\varepsilon)$, pas même ceux qui sont aux numérateurs des $\mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right)$ et $\mathrm{C}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right)$, car C' est toujours compris entre k et l'unité, et A entre zéro et k.

§ CXXII.

NOTATION DES y_r, y_ρ.

Pour simplifier l'énoncé des propriétés réciproques des deux transformations (26) et (30), nous désignerons la première par le symbole $[r]$, la seconde par celui-ci $[\rho]$, et $x = \mathrm{A}(\varepsilon; k)$ étant la fonction inverse primitive, nous représenterons par y_r et y_ρ les fonctions nouvelles que l'on obtient par les deux transformations $[r]$ et $[\rho]$. Par exemple, avec cette notation, on peut dire que les valeurs

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{y_r}{h} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{x}{k}\,\Pi\,\dfrac{1-\dfrac{x^2}{A^2(2ni)}}{1-\dfrac{x^2A^2(2ni)}{k^2}},\\[3ex]
\text{où } \mu = \Pi\,\dfrac{A^2(p-2n)i}{A^2(2ni)},\qquad h = k^p\,\Pi\left(\dfrac{A(p-2n)i}{k}\right)^4,\\[3ex]
\dfrac{y_\rho}{g} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{x}{k}\,\Pi\,\dfrac{1+\dfrac{x^2B'^2(2ni')}{k^2A'^2(2ni')}}{1+\dfrac{x^2A'^2(2ni')}{B'^2(2ni')}},\\[3ex]
\text{où } \lambda = \Pi\,\dfrac{A'^2(p-2n)i'}{A'^2(2ni')},\qquad g = \dfrac{1}{k^{p-2}}\,\Pi\left(\dfrac{k}{C'(2ni')}\right)^4,
\end{array}\right.$$

sont des solutions de l'équation (2), car elles donnent identiquement

$$(32)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{1-x^2}}\left\{\begin{array}{l}
= \mu\displaystyle\int_0^{y_r}\frac{dy_r}{\sqrt{h^2-y_r^2}\sqrt{1-y_r^2}}.\\[3ex]
= \lambda\displaystyle\int_0^{y_\rho}\frac{dy_\rho}{\sqrt{g^2-y_\rho^2}\sqrt{1-y_\rho^2}}.
\end{array}\right.$$

§ CXXIII.

CHANGEMENT DE ε EN $\varepsilon\sqrt{-1}$ DANS $[r]$.

Les équations des tableaux (26) et (30), ayant lieu quel que soit ε, peuvent être traitées comme des identités, qui existent toujours, lors même que l'on donne à la variable une valeur imaginaire. Voyons donc ce que deviennent ces équations lorsqu'on y change ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$. Par ce changement, les formules (28) et les relations connues entre (A, B, C), entre (A′, B′, C′) transforment successivement la première (26) de la manière suivante :

$$\frac{A'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)}{B'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{A'(\varepsilon)}{B'(\varepsilon)}\,\Pi\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1+\dfrac{k^2 A'^2(\varepsilon)}{B'^2(\varepsilon)A^2(2ni)}}{1+\dfrac{A'^2(\varepsilon)A^2(2ni)}{B'^2(\varepsilon)}}, \\[2ex] \text{ou}\ \dfrac{k'^2+A'^2(\varepsilon)\dfrac{B^2(2ni)}{A^2(2ni)}}{k'^2-A'^2(\varepsilon)C^2(2ni)}, \\[2ex] \text{ou}\ \dfrac{1+\dfrac{A'^2(\varepsilon)B^2(2ni)}{k'^2A^2(2ni)}}{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)C^2(2ni)}{k'^2}}, \end{array}\right\}$$

et les deux autres équations (26) deviennent, par une suite d'opérations semblables,

$$\frac{h'}{B'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)} = \frac{k'}{B'(\varepsilon)}\,\Pi\,\frac{1+\dfrac{A'^2(\varepsilon)A^2(2ni)}{B^2(2ni)}}{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)C^2(2ni)}{k'^2}},$$

$$h'\,\frac{C'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)}{B'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)} = k'\,\frac{C'(\varepsilon)}{B'(\varepsilon)}\,\Pi\,\frac{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)}{C^2(2ni)}}{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)C^2(2ni)}{k'^2}}.$$

De ces trois équations, celle en $B'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)$ seul permet d'isoler $A'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)$ et $C'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};\, h'\right)$ dans les deux autres, et l'on obtient définitivement le tableau

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h'}A'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h'\right)=\frac{1}{\mu\Phi'}\,\frac{A'(\varepsilon)}{k'}\,\Pi\left[1+\frac{A'^2(\varepsilon)B^2(2ni)}{k'^2A^2(2ni)}\right],\\
&\frac{1}{h'}B'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h'\right)=\frac{1}{\Phi'}\,\frac{B'(\varepsilon)}{k'}\,\Pi\left[1-\frac{A'^2(\varepsilon)C^2(2ni)}{k'^2}\right],\\
&C'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h'\right)=\frac{1}{\Phi'}\,C'(\varepsilon)\,\Pi\left[1-\frac{A'^2(\varepsilon)}{C^2(2ni)}\right],\\
&\Phi'=\Pi\left[1+A'^2(\varepsilon)\frac{A^2(2ni)}{B^2(2ni)}\right];\\
&\mu=\Pi\,\frac{A^2(p-2n)i}{A^2(2ni)},\quad h'=\frac{1}{k'^{p-2}}\,\Pi\left(\frac{k'}{C(2ni)}\right)^4,
\end{aligned}\right.$$

où Φ' est le dénominateur commun, et h' la valeur que l'on obtient en changeant à la fois, dans la première équation,

$\frac{A'(\varepsilon)}{k'}$ en $\frac{1}{A'(\varepsilon)}$, et $\frac{A'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h'\right)}{h'}$ en $\frac{1}{A'\left(\frac{\varepsilon}{\mu};h'\right)}$, seule valeur qui

puisse vérifier que la troisième équation est une conséquence des deux premières; h' est d'ailleurs le module complémentaire de h, comme k' est celui de k.

§ CXXIV.

CHANGEMENT DE ε EN $\varepsilon\sqrt{-1}$ DANS $[\rho]$.

Par le même changement de ε en $\varepsilon\sqrt{-1}$, les formules (28) et les relations connues entre (A, B, C), entre (A′, B′, C′), transforment ainsi la première équation (30)

$$\frac{A'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}{B'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}=\frac{1}{\lambda}\frac{A'(\varepsilon)}{B'(\varepsilon)}\Pi\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)B'^2(2ni')}{B'^2(\varepsilon)A'^2(2ni')}}{1-k^2\dfrac{A'^2(\varepsilon)A'^2(2ni')}{B'^2(\varepsilon)B'^2(2ni')}},\\ \text{ou }\dfrac{k'^2-A'^2(\varepsilon)\dfrac{k'^2}{A'^2(2ni')}}{k'^2-A'^2(\varepsilon)\dfrac{k'^2C'^2(2ni')}{B'^2(2ni')}},\\ \text{ou }\dfrac{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)}{A'^2(2ni')}}{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)}{A'^2(p-2n)i'}},\end{array}\right\}$$

et les deux autres équations (30) deviennent, par les mêmes opérations,

$$\frac{g'}{B'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}=\frac{k'}{B'(\varepsilon)}\Pi\frac{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)A'^2(2ni')}{k'^2}}{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)}{A'^2(p-2n)i'}},$$

$$g'\frac{C'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}{B'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}=k'\frac{C'(\varepsilon)}{B'(\varepsilon)}\Pi\frac{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)A'^2(p-2n)i'}{k'^2}}{1-\dfrac{A'^2(\varepsilon)}{A'^2(p-2n)i'}}.$$

De ces trois nouvelles équations, celle en $B'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)$ seul permet d'isoler $A'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)$ et $C'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)$ dans les deux autres, et l'on a le tableau

$$(34)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{g'}A'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)=\frac{1}{\lambda\Theta'}\frac{A'(\varepsilon)}{k'}\Pi\left[1-\frac{A'^2(\varepsilon)}{A'^2(2ni')}\right],\\
&\frac{1}{g'}B'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)=\frac{1}{\Theta'}\frac{B'(\varepsilon)}{k'}\Pi\left[1-\frac{A'^2(\varepsilon)}{A'^2(p-2n)i'}\right],\\
&C'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)=\frac{C'(\varepsilon)}{\Theta'}\Pi\left[1-\frac{A'^2(\varepsilon)\,A'^2(p-2ni')}{k'^2}\right],\\
&\Theta'=\Pi\left[1-\frac{A'^2(\varepsilon)\,A'^2(2ni')}{k'^2}\right],\\
&\lambda=\Pi\,\frac{A'^2(p-2n)i'}{A'^2(2ni')},\quad g'=k'^p\,\Pi\left(\frac{A'(p-2n)i'}{k'}\right)^4,
\end{aligned}\right.$$

où Θ' est le dénominateur commun, et g' la valeur que l'on obtient en changeant à la fois dans la première équation $\frac{A'(\varepsilon)}{k'}$ en $\frac{1}{A'(\varepsilon)}$, et $\frac{A'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}{g'}$ en $\frac{1}{A'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda};g'\right)}$, seule valeur qui puisse vérifier que la troisième équation est une conséquence des deux premières; g' est d'ailleurs le module complémentaire de g, comme k' est celui de k.

§ CXXV.

THÉORÈME DES (y_r, y'_p) ET (y_p, y'_r).

Du rapprochement des quatre tableaux (26), (30), (33) et (34), il résulte qu'en désignant par x' la fonction conjuguée $A'(\varepsilon)$, et par y' celle qu'on en déduit par transformation, les deux valeurs

$$(35)\left\{\begin{aligned} &\frac{y'_\rho}{h'} = \frac{1}{\mu}\frac{x'}{k'}\,\Pi\,\frac{1+\dfrac{x'^2 B^2(2ni)}{k'^2 A^2(2ni)}}{1+x'^2\dfrac{A^2(2ni)}{B^2(2ni)}},\\ &\text{où } \mu = \Pi\,\frac{A^2(p-2n)i}{A^2(2ni)},\quad h' = \frac{1}{k'^{p-2}}\,\Pi\left(\frac{k'}{C(2ni)}\right)^4,\\ &\frac{y'_r}{g'} = \frac{1}{\lambda}\frac{x'}{k'}\,\Pi\,\frac{1-\dfrac{x'^2}{A'^2(2ni')}}{1-\dfrac{x'^2 A'^2(2ni')}{k'^2}},\\ &\text{où } \lambda = \Pi\,\frac{A'^2(p-2n)i'}{A'^2(2ni')},\quad g' = k'^p\,\Pi\left(\frac{A'(p-2n)i'}{k'}\right)^4, \end{aligned}\right.$$

donneront identiquement

$$(36)\quad \int_0^{x'} \frac{dx'}{\sqrt{k'^2-x'^2}\,\sqrt{1-x'^2}}\left\{\begin{aligned} &= \mu\int_0^{y'_\rho}\frac{dy'_\rho}{\sqrt{h'^2-y'^2_\rho}\,\sqrt{1-y'^2_\rho}}\\ &= \lambda\int_0^{y'_r}\frac{dy'_r}{\sqrt{g'^2-y'^2_r}\,\sqrt{1-y'^2_r}}. \end{aligned}\right.$$

Les deux groupes [(31), (32)] et [(35), (36)] établissent le théorème suivant :

Théorème. — Si l'on applique la transformation [r] à la fonction inverse A[ε] et la transformation [ρ] à sa conjuguée A'(ε) les deux fonctions nouvelles seront conjuguées l'une de l'autre, et le coefficient m ou μ sera le même. Et, réciproquement, si l'on applique la transformation [ρ] à A(ε), et la transformation [r] à A'(ε), les deux fonctions nouvelles seront encore conjuguées l'une de l'autre, et le coefficient m ou λ sera le même.

§ CXXVI.

DISTINCTION ENTRE [r] ET [ρ].

Dans la transformation [r], tableau (26), si la variable ε parcourt l'intervalle de $-$ K à $+$ K, $x = \mathrm{A}(\varepsilon)$ marche de $-k$ à $+k$, et ne s'annule qu'une fois, tandis que $\mathrm{A}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ passe p fois par zéro. Ou, autrement, quand la variable ε de $\mathrm{A}(\varepsilon; k)$ parcourt l'intervalle $2\mathrm{K}$, la variable $\frac{\varepsilon}{\mu}$ de $\mathrm{A}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ parcourt nécessairement l'intervalle $2p\mathrm{H}$; donc $\frac{2\mathrm{K}}{\mu} = 2p\mathrm{H}$, ou

$$\mathrm{K} = \mu p \mathrm{H}. \tag{37}$$

Dans la transformation [ρ], tableau (30), si la variable ε parcourt l'intervalle de $-$ K à $+$ K, $x = \mathrm{A}(\varepsilon)$ marche de $-k$ à $+k$, et ne s'annule qu'une fois, tandis que $\mathrm{A}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right)$, ne passant aussi qu'une fois par zéro, marche de $-g$ à $+g$. Ou, autrement, quand la variable ε de $\mathrm{A}(\varepsilon; k)$ parcourt l'intervalle $2\mathrm{K}$, la variable $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ de $\mathrm{A}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right)$ parcourt nécessairement l'intervalle $2\mathrm{G}$; on a donc $\frac{2\mathrm{K}}{\lambda} = 2\mathrm{G}$, ou

$$\mathrm{K} = \lambda \mathrm{G}. \tag{38}$$

§ CXXVII.

RELATIONS DES RAPPORTS $\frac{\varpi}{\varpi'}$.

Telle est la différence caractéristique des deux transformations [r] et [ρ]. Si l'on applique les deux formules (37) et (38) aux deux transformées, y_r (31) et y'_ρ (35), on a

$$(39)\qquad \left.\begin{array}{l} K = \mu p H \\ K' = \mu H' \end{array}\right\},\quad \text{d'où}\quad \frac{K}{K'} = p\,\frac{H}{H'}.$$

Si l'on applique les deux formules (38) et (37) aux deux transformées y_ρ (31) et y'_r (35), on a

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l} K = \lambda G \\ K' = \lambda p G' \end{array}\right\},\quad \text{d'où}\quad \frac{G}{G'} = p\,\frac{K}{K'}.$$

§ CXXVIII.

RETOUR A k PAR $[\rho]$ APRÈS $[r]$.

Il résulte de la comparaison de ces deux groupes (39) et (40), que si l'on change K en H, G se changera en K, ou bien que si l'on change k en h, g se changera en k, c'est-à-dire que si, après avoir passé du module k au module h par la transformation $[r]$, ou de x à y_r, on applique à y_r la transformation $[\rho]$, pour obtenir une nouvelle fonction z, on repassera du module h au module k.

Voyons quelle sera la valeur du coefficient m ou λ, dans cette dernière transformation $[\rho]$. Il faut, pour obtenir cette valeur, que nous désignerons par Λ, changer, dans $\lambda = \frac{K}{G}$ [valeur déduite du groupe (40)] K en H, et G en K; d'où $\Lambda = \frac{H}{K}$. Mais, d'après le groupe (39), on a $\frac{H}{K} = \frac{1}{\mu p}$; donc

$$(41)\qquad \Lambda = \frac{1}{\mu p}.$$

§ CXXIX.

NOUVELLE SOLUTION DE LA MULTIPLICATION.

Ainsi la transformation $[r]$, appliquée à x, ayant résolu l'équation

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}\sqrt{1 - x^2}} = \mu \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{h^2 - y^2}\sqrt{1 - y^2}},$$

la transformation $[\rho]$, appliquée à y, résout celle-ci :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{h^2 - y^2}\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\mu p} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}\sqrt{1 - z^2}},$$

d'où l'on conclut, par l'élimination de l'intégrale transcendante en y,

$$(42) \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}\sqrt{1 - z^2}} = p \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}\sqrt{1 - x^2}},$$

c'est-à-dire que la nouvelle fonction inverse z, d'abord exprimée en y_r par des substitutions correspondantes dans la formule y_ρ (31) [savoir : par les changements respectifs

de y_ρ, g, x, k, (A′, B′, ou C′) de $(qi'; k')$,

en z, k, y_r, h, (A′, B′, ou C′) de $\left(q\frac{H'}{p}; h'\right)$,

faits dans cette formule], puis exprimée en x, en substituant à y_r sa valeur (31), résoudra l'équation (42), ou le problème de la multiplication des transcendantes elliptiques.

Cette nouvelle solution, obtenue par une double transformation, c'est-à-dire par le passage du module k au module h, et le retour du module h au module k, se distingue essentiellement de la solution trouvée par Abel, § 65, sans changer de module, ou en restant dans le même système de fonctions inverses.

L'identité nécessaire des deux valeurs de z ou A $(p\varepsilon)$, en x ou A (ε), obtenue des deux manières, pourra conduire à des conséquences importantes sur la liaison qui existe entre les fonctions inverses de systèmes différents. Et ces conséquences seront exclusivement dues à la découverte de Jacobi.

DOUZIÈME LEÇON.

Transformation des transcendantes elliptiques étendues aux neuf fonctions (A_i, B_i, C_i). — Transformations descendante et ascendante. — Généralisations. — Échelle descendante. — Échelle ascendante. — Solution générale du problème des échelles.

§ CXXX.

TRANSFORMATIONS PAR LES (A, B, C).

Les solutions trouvées du problème de la transformation des transcendantes elliptiques s'appliquent non-seulement à la fonction inverse A, mais à tous les (A_i, B_i, C_i) appartenant au même système ou au même module k. Il importe de constater cette généralisation, qui donne une nouvelle preuve de la simultanéité des neuf fonctions.

D'abord, les formules (26), § 120, de la transformation $[r]$, peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
A\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu A(\varepsilon)\,\Pi \frac{A^2(2ni) - A^2(\varepsilon)}{\dfrac{k^2}{A^2(2ni)} - A^2(\varepsilon)},\\
B\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu B(\varepsilon)\,\Pi \frac{B^2(\varepsilon) - B^2(p-2n)i}{B^2(\varepsilon) + k^2\dfrac{C^2(2ni)}{A^2(2ni)}},\\
C\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu C(\varepsilon)\,\Pi \frac{C^2(\varepsilon) + k'^2\dfrac{A^2(2ni)}{B^2(2ni)}}{C^2(\varepsilon) + \dfrac{B^2(2ni)}{A^2(2ni)}},
\end{aligned}\right.$$

en chassant les dénominateurs h, k, μ, substituant leurs valeurs, ramenant à l'unité, dans les facteurs des produits Π, les coefficients de $A^2(\varepsilon)$ que l'on remplace ensuite par $k^2 - B^2(\varepsilon)$ dans la seconde formule, par $1 - C^2(\varepsilon)$ dans la troisième.

Ainsi écrites, ces formules reproduisent par elles-mêmes les valeurs de μ, h, h' : μ s'obtient en faisant, dans la troisième, $\varepsilon = 0$, d'où $C(\varepsilon) = 1$, et $C\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = 1$; μ étant connu, on retrouve h en faisant, dans la seconde, $\varepsilon = 0$, d'où $B(\varepsilon) = k$, et $B\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = h$; enfin on obtient h' en faisant, encore dans la troisième, $\varepsilon = K$, d'où $C(\varepsilon) = k'$, $C\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = h'$. Ce qui donne

$$\text{(1 bis)} \qquad \begin{aligned} \mu &= \Pi \frac{A^2(p-2n)i}{A^2(2ni)}, \\ h &= k^p \, \Pi \left(\frac{A(p-2n)i}{k}\right)^4, \\ h' &= \frac{k'^p}{\Pi\, C^4(2ni)}. \end{aligned}$$

Pareillement, les formules (30), § 121, de la transformation $[\rho]$, peuvent se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda A(\varepsilon)\, \Pi \frac{A^2(\varepsilon) + k^2 \dfrac{A'^2(2ni')}{B'^2(2ni')}}{A^2(\varepsilon) + \dfrac{B'^2(2ni')}{A'^2(2ni')}}, \\ B\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda B(\varepsilon)\, \Pi \frac{B^2(\varepsilon) + B'^2(p-2n)i'}{k'^2 \dfrac{C'^2(2ni')}{A'^2(2ni')} - B^2(\varepsilon)}, \\ C\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda C(\varepsilon)\, \Pi \frac{C^2(\varepsilon) - A'^2(2ni')}{\dfrac{k'^2}{A'^2(2ni')} - C^2(\varepsilon)}; \end{aligned} \right.$$

à l'aide des mêmes opérations qui ont donné le tableau (1). Ces formules reproduisent aussi par elles-mêmes les valeurs de λ, g, g', lesquelles sont

$$\text{(2 bis)}\qquad \begin{aligned} \lambda &= \Pi\,\frac{A'^{2}(p-2n)i'}{A'^{2}(2ni')},\\ g &= \frac{k^{p}}{\Pi\,C'^{4}(2ni')},\\ g' &= k'^{p}\,\Pi\left(\frac{A'(p-2n)i'}{k'}\right)^{4}. \end{aligned}$$

§ CXXXI.

TRANSFORMATIONS DESCENDANTE ET ASCENDANTE.

Aux valeurs (1 *bis*), le module primitif k étant moindre que l'unité et $A(p-2n)i$ moindre que k, le nouveau module h est plus petit que k, et puisque l'on doit avoir $h^2+h'^2=1=k^2+k'^2$, h' est au contraire plus grand que k'. Aux valeurs (2 *bis*), k' étant moindre que l'unité, et $A'(p-2n)i'$ moindre que k', g' est plus petit k', et puisque l'on doit avoir $g^2+g'^2=1=k^2+k'^2$, le nouveau module g est au contraire plus grand que k.

Ainsi, des deux transformations $[r]$ et $[\rho]$, appliquées aux fonctions inverses (A, B, C), la première diminue le module, la seconde l'augmente. En outre, par la transformation $[r]$, le rapport $\frac{\varpi}{\varpi'}$ diminue, ou *descend* en valeur, puisque de $\frac{K}{K'}$ il devient $\frac{H}{H'}=\frac{1}{p}\frac{K}{K'}$, § 127 ; et, au contraire, par la transformation $[\rho]$, le rapport $\frac{\varpi}{\varpi'}$ augmente, ou *monte* en valeur, puisque de $\frac{K}{K'}$ il devient $\frac{G}{G'}=p\frac{K}{K'}$, § 127. Nous exprimerons cette différence caractéristique, en disant que la première transformation est *descendante*, et la seconde *ascendante*.

§ CXXXII.

TRANSFORMATIONS DE ε PAR LES (A, B, C).

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_\delta$, $\mathcal{B}_\delta$, Γ_δ les fonctions inverses de $\frac{\varepsilon}{\mu}$ au module descendant h du tableau (1), par $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{B}_\alpha$, Γ_α les fonctions inverses de $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ au module ascendant g du tableau (2), par A, B, C, les fonctions de ε au module primitif k, les formules des deux tableaux (1) et (2) résolvent respectivement les équations suivantes :

$$\varepsilon = \int_0^{A} \frac{dA}{\sqrt{k^2 - A^2}\sqrt{1 - A^2}} \left\{ \begin{aligned} &= \mu \int_0^{\mathcal{A}_\delta} \frac{d\mathcal{A}_\delta}{\sqrt{h^2 - \mathcal{A}_\delta^2}\sqrt{1 - \mathcal{A}_\delta^2}} \\ &= \lambda \int_0^{\mathcal{A}_\alpha} \frac{d\mathcal{A}_\alpha}{\sqrt{g^2 - \mathcal{A}_\alpha^2}\sqrt{1 - \mathcal{A}_\alpha^2}}, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \varepsilon = \int_B^{k} \frac{dB}{\sqrt{k'^2 + B^2}\sqrt{k^2 - B^2}} \left\{ \begin{aligned} &= \mu \int_{\mathcal{B}_\delta}^{h} \frac{d\mathcal{B}_\delta}{\sqrt{h'^2 + \mathcal{B}_\delta^2}\sqrt{h^2 - \mathcal{B}_\delta^2}} \\ &= \lambda \int_{\mathcal{B}_\alpha}^{g} \frac{d\mathcal{B}_\alpha}{\sqrt{g'^2 + \mathcal{B}_\alpha^2}\sqrt{g^2 - \mathcal{B}_\alpha^2}}, \end{aligned} \right.$$

$$\varepsilon = \int_C^{1} \frac{dC}{\sqrt{1 - C^2}\sqrt{C^2 - k'^2}} \left\{ \begin{aligned} &= \mu \int_{\Gamma_\delta}^{1} \frac{d\Gamma_\delta}{\sqrt{1 - \Gamma_\delta^2}\sqrt{\Gamma_\delta^2 - h'^2}} \\ &= \lambda \int_{\Gamma_\alpha}^{1} \frac{d\Gamma_\alpha}{\sqrt{1 - \Gamma_\alpha^2}\sqrt{\Gamma_\alpha^2 - g'^2}}, \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit facilement des différentielles (6), § 37.

Ainsi, pour transformer la transcendante ε, on peut appliquer l'une ou l'autre des transformations descendante et ascendante, indifféremment à l'une des trois fonctions inverses (A, B, C); les coefficients μ ou λ, les nouveaux modules h ou g, sont les mêmes dans les trois cas.

§ CXXXIII.

TRANSFORMATIONS PAR LES (A', B', C').

Les transformations $[\rho]$ et $[r]$ appliquées aux fonctions inverses (A', B', C') du système conjugué, donnent les tableaux (33) et (34), §§ 123 et 124, que l'on met sous la forme

(4)

$$A'\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h'\right) = \mu A'(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{A'^2(\varepsilon) + k'^2\dfrac{A^2(2ni)}{B^2(2ni)}}{A'^2(\varepsilon) + \dfrac{B^2(2ni)}{A^2(2ni)}},$$

$$B'\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h'\right) = \mu B'(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{B'^2(\varepsilon) + B^2(p-2n)i}{k^2\dfrac{C^2(2ni)}{A^2(2ni)} - B'^2(\varepsilon)},$$

$$C'\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h'\right) = \mu C'(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{C'^2(\varepsilon) - A^2(2ni)}{\dfrac{k^2}{A^2(2ni)} - C'^2(\varepsilon)},$$

$$A'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g'\right) = \lambda A'(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{A'^2(2ni') - A'^2(\varepsilon)}{\dfrac{k'^2}{A'^2(2ni')} - A'^2(\varepsilon)},$$

$$B'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g'\right) = \lambda B'(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{B'^2(\varepsilon) - B'^2(p-2n)i'}{B'^2(\varepsilon) + k'^2\dfrac{C'^2(2ni')}{A'^2(2ni')}},$$

$$C'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g'\right) = \lambda C'(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{C'^2(\varepsilon) + k^2\dfrac{A'^2(2ni')}{B'^2(2ni')}}{C'^2(\varepsilon) + \dfrac{B'^2(2ni')}{A'^2(2ni')}},$$

en répétant les mêmes opérations que pour les tableaux (1) et (2). On peut alors vérifier, par leur reproduction directe, que les coefficients μ et λ, les modules (h, h'), (g, g') ont ici les mêmes valeurs (1 *bis*) et (2 *bis*).

§ CXXXIV.

TRANSFORMATIONS EN (A_1, B_1, C_1).

Il s'agit d'obtenir les formules (4) en (A_1, B_1, C_1). A cet effet on se servira du groupe de relations

$$A' = \frac{B_1}{A_1}, \quad B' = k\frac{C_1}{A_1}, \quad C' = \frac{k}{A_1},$$

$$A_1 = \frac{k}{C'}, \quad B_1 = k\frac{A'}{C'}, \quad C_1 = \frac{B'}{C'},$$

$$(5) \qquad A^2 - B_1^2 = k^2, \quad A_1^2 + C_1^2 = 1, \quad B_1^2 + C_1^2 = k'^2,$$

$$A_1(p-2n)i' = \frac{k}{A_1(2ni')},$$

$$B_1(p-2n)i' = k\frac{C_1(2ni')}{A_1(2ni')},$$

$$C_1(p-2n)i' = \frac{B_1(2ni')}{A_1(2ni')},$$

empruntées aux tableaux (13) et (14), § 54, tirées du tableau (2), § 80, enfin déduites des équations (6), § 48. On substituera ces diverses valeurs dans les formules de la première case (4); exprimant d'abord tous les produits Π en $B_1^2(\varepsilon)$; remarquant que l'une des trois équations qui contient $A_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ seul, permet d'isoler $B_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ et $C_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ aux deux autres; remplaçant enfin $B_1^2(\varepsilon)$ par $A_1^2(\varepsilon) - k^2$ dans la première, par $k'^2 - C_1^2(\varepsilon)$ dans la troisième, on obtient définitivement le groupe

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu A_1(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{A_1^2(\varepsilon) - C_1'^2(p-2n)i}{k^2\dfrac{A_1'^2(2ni)}{B_1'^2(2ni)} - A_1^2(\varepsilon)},\\
B_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu B_1(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{B_1^2(\varepsilon) + B_1'^2(2ni)}{\dfrac{k^2 k'^2}{B_1'^2(2ni)} - B_1^2(\varepsilon)},\\
C_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu C_1(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{C_1^2(\varepsilon) + \dfrac{B_1'^2(2ni)}{C_1'^2(2ni)}}{k'^2\dfrac{C_1'^2(2ni)}{B_1'^2(2ni)} + C_1^2(\varepsilon)},
\end{aligned}\right.$$

où le coefficient μ et les modules h et h' actuellement transformés en (C_1', A_1'), ont les valeurs

$$(6\ bis)\qquad \begin{aligned}
\mu &= \Pi\,\frac{C_1'^2(2ni)}{C_1'^2(p-2n)i},\\
h &= \frac{\Pi\, C_1'^4(2ni)}{k^{p-2}},\\
h' &= \frac{\Pi\, A_1'^4(2ni)}{k'^{p-2}},
\end{aligned}$$

qui se reproduisent d'ailleurs directement quand on fait successivement, dans la première (6) $\varepsilon = K'$, $A_1(\varepsilon) = 1$, $A_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = 1$; dans la première encore $\varepsilon = 0$, $A_1(\varepsilon) = k$, $A_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}, h\right) = h$; enfin dans la troisième $\varepsilon = 0$, $C_1(\varepsilon) = k'$, $C_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = h'$.

Les mêmes substitutions et des opérations semblables faites dans les formules de la seconde case (4) conduisent au nouveau groupe

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_1\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda A_1(\varepsilon)\,\Pi \frac{A_1^2(\varepsilon) + \dfrac{B_1^2(2ni')}{C_1^2(2ni')}}{A_1^2(\varepsilon) + k^2\dfrac{C_1^2(2ni')}{B_1^2(2ni')}},\\
B_1\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda B_1(\varepsilon)\,\Pi \frac{B_1^2(2ni') - B_1^2(\varepsilon)}{B_1^2(\varepsilon) + \dfrac{k^2 k'^2}{B_1^2(2ni')}},\\
C_1\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda C_1(\varepsilon)\,\Pi \frac{C_1^2(\varepsilon) - C_1^2(p-2n)i'}{k'^2\dfrac{A_1^2(2ni')}{B_1^2(2ni')} - C_1^2(\varepsilon)},
\end{aligned}
\right.
$$

où le coefficient λ, et les modules g et g', actuellement transformés en (C_1, A_1), ont les valeurs

$$
(7\ bis)\qquad
\begin{aligned}
\lambda &= \Pi \frac{C_1^2(2ni')}{C_1^2(p-2n)i'},\\
g &= \frac{\Pi A_1^4(2ni')}{k^{p-2}},\\
g' &= \frac{\Pi C_1^4(2ni')}{k'^{p-2}};
\end{aligned}
$$

qui se reproduisent d'ailleurs directement, de la même manière.

§ CXXXV.

TRANSFORMATIONS DE ε PAR LES (A_1, B_1, C_1).

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_{\delta_1}$, $\mathcal{B}_{\delta_1}$, Γ_{δ_1}, les fonctions inverses de $\frac{\varepsilon}{\mu}$ au module descendant h du tableau (6), par $\mathcal{A}_{\alpha_1}$, $\mathcal{B}_{\alpha_1}$, Γ_{α_1}, les fonctions de $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ au module ascendant g du tableau (7), par A_1, B_1, C_1, les fonctions de ε au module primitif k, les formules des deux tableaux (6) et (7) résolvent respectivement les équations suivantes :

$$\varepsilon=\int_k^{A_1}\frac{dA_1}{\sqrt{A_1^2-k^2}\sqrt{1-A_1^2}}\left\{\begin{array}{l}=\mu\displaystyle\int^{\mathcal{A}_{\delta_1}}\frac{d\mathcal{A}_{\delta_1}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\delta_1}^2-h^2}\sqrt{1-\mathcal{A}_{\delta_1}^2}}\\[2ex] =\lambda\displaystyle\int_g^{\mathcal{A}_{\alpha_1}}\frac{d\mathcal{A}_{\alpha_1}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\alpha_1}^2-g^2}\sqrt{1-\mathcal{A}_{\alpha_1}^2}},\end{array}\right.$$

$$(8)\quad \varepsilon=\int_0^{B_1}\frac{dB_1}{\sqrt{k'^2-B_1^2}\sqrt{k^2+B_1^2}}\left\{\begin{array}{l}=\mu\displaystyle\int_0^{\mathcal{B}_{\delta_1}}\frac{d\mathcal{B}_{\delta_1}}{\sqrt{h'^2-\mathcal{B}_{\delta_1}^2}\sqrt{h^2+\mathcal{B}_{\delta_1}^2}}\\[2ex] =\lambda\displaystyle\int_0^{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\frac{d\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\sqrt{g'^2-\mathcal{B}_{\alpha_1}^2}\sqrt{g^2+\mathcal{B}_{\alpha_1}^2}},\end{array}\right.$$

$$\varepsilon=\int_{C_1}^{k'}\frac{dC_1}{\sqrt{1-C_1^2}\sqrt{k'^2-C_1^2}}\left\{\begin{array}{l}=\mu\displaystyle\int_{\Gamma_{\delta_1}}^{h'}\frac{d\Gamma_{\delta_1}}{\sqrt{1-\Gamma_{\delta_1}^2}\sqrt{h'^2-\Gamma_{\delta_1}^2}}\\[2ex] =\lambda\displaystyle\int_{\Gamma_{\alpha_1}}^{g'}\frac{d\Gamma_{\alpha_1}}{\sqrt{1-\Gamma_{\alpha_1}^2}\sqrt{g'^2-\Gamma_{\alpha_1}^2}},\end{array}\right.$$

que l'on déduit facilement des différentielles (6), § 37.

Ainsi pour transformer la transcendante ε, on peut encore appliquer l'une ou l'autre des transformations descendante et ascendante, à l'une quelconque des trois fonctions inverses (A_1, B_1, C_1) ; les coefficients μ ou λ, les nouveaux modules h ou g, qui sont les mêmes dans les trois cas, ont aussi les mêmes valeurs qu'aux tableaux (1) et (2), mais ils sont exprimés en (C'_1, A'_1), en (C_1, A_1), au lieu de l'être en (A, C), en (A', C').

§ CXXXVI.

TRANSFORMATIONS EN (A_2, B_2, C_2).

Enfin, on peut obtenir les formules (1) et (2) en (A_2, B_2, C_2). A cet effet, on se servira du groupe de relations

$$A = k\frac{C_2}{B_2},\qquad B = \frac{kk'}{B_2},\qquad C = k'\frac{A_2}{B_2},$$

$$(9)\qquad A_2 = k\frac{C}{B},\qquad B_2 = \frac{kk'}{B},\qquad C_2 = k'\frac{A}{B},$$

$$A_2^2 - B_2^2 = k^2,\quad A_2^2 - C_2^2 = 1,\quad B_2^2 - C_2^2 = k'^2.$$

$$A_2(p-2n)i = \frac{B_2(2ni)}{C_2(2ni)},$$

$$B_2(p-2n)i = k'\frac{A_2(2ni)}{C_2(2ni)},$$

$$C_2(p-2n)i = \frac{k'}{C_2(2ni)},$$

empruntées aux tableaux (13) et (15), § 54, tirées du tableau (2), § 80, enfin déduites des équations (10), § 49. On substituera ces diverses valeurs dans les formules (1); exprimant d'abord tous les produits Π en $C_2^2(\varepsilon)$; remarquant que l'une des trois équations, qui contient $B_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ seul, permet d'isoler $C_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ et $A_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$ aux deux autres; remplaçant enfin $C_2^2(\varepsilon)$ par $B_2^2(\varepsilon) - k'^2$ dans la première, par $A_2^2(\varepsilon) - 1$ dans la troisième, et changeant l'ordre des équations, on obtient définitivement le groupe

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
A_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu A_2(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{A_2^2(\varepsilon) - k^2\dfrac{C_2^2(2ni)}{B_2^2(2ni)}}{A_2^2(p-2n)i - A_2^2(\varepsilon)},\\
B_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu B_2(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{B_2^2(\varepsilon) + k^2\dfrac{C_2^2(2ni)}{A_2^2(2ni)}}{B_2^2(p-2n)i - B_2^2(\varepsilon)},\\
C_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) &= \mu C_2(\varepsilon)\,\Pi\,\frac{C_1^2(2ni) - C_2^2(\varepsilon)}{C_2^2(p-2n)i - C_2^2(\varepsilon)},
\end{aligned}\right.$$

où le coefficient μ, les modules h et h', actuellement transformés en (A_2, B_2) ont les valeurs

$$(10\ bis)\qquad \begin{aligned} \mu &= \Pi \frac{A_2^2(p-2n)i}{A_2^2(2ni)}, \\ h &= \frac{k^p}{\Pi A_2^4(2ni)}, \\ h' &= \frac{1}{k'^{p-2}} \Pi \frac{B_2^4(2ni)}{A_2^4(2ni)}; \end{aligned}$$

on reproduit : μ, en faisant, dans la première (10), $\varepsilon = 0$, $A_2(\varepsilon) = 1$, $A_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = 1$; et h', en faisant dans la seconde $\varepsilon = 0$, $B_2(\varepsilon) = h'$, $B_2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right) = h'$.

Les mêmes substitutions et des opérations semblables faites dans les formules (2) conduisent au nouveau groupe

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} A_2\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda A_2(\varepsilon)\, \Pi \frac{A_2^2(\varepsilon) + C_2'^2(2ni')}{A_2^2(\varepsilon) + C_2'^2(p-2n)i'}, \\ B_2\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda B_2(\varepsilon)\, \Pi \frac{B_2^2(\varepsilon) - k'^2 \dfrac{C_2'^2(2ni')}{A'^2(2ni')}}{B_2^2(\varepsilon) + B_2'^2(p-2n)i'}, \\ C_2\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right) &= \lambda C_2(\varepsilon)\, \Pi \frac{C_2^2(\varepsilon) + k'^2 \dfrac{C_2'^2(2ni')}{B_2'^2(2ni')}}{C_2^2(\varepsilon) + A_2'^2(p-2n)i'}, \end{aligned} \right.$$

où le coefficient λ, les modules g et g', actuellement transformés en (A'_2, B'_2), ont les valeurs

$$(11)\qquad \begin{aligned} \lambda &= \Pi \frac{A_2'^2(p-2n)i'}{A_2'(2ni')}, \\ g &= \frac{1}{k^{p-2}} \Pi \frac{B_2'^4(2ni')}{A_2'^4(2ni')}, \\ g' &= \frac{k'^p}{\Pi A_2'^4(2ni')}. \end{aligned}$$

On reproduit directement μ et g' de la même manière.

Les fonctions (A_2, B_2, C_2) étant infinies pour la valeur

K de ε, les tableaux (10) et (11) ne peuvent pas reproduire directement les modules h et g; mais ce seront, au contraire, ces modules qui se reproduiront, dans les tableaux qu'on obtiendra, en exprimant par les (A'_2, B'_2, C'_2) les formules (4); à leur tour, h' et g' échapperont à ce genre de vérification.

§ CXXXVII.

TRANSFORMATIONS DE ε PAR LES (A_2, B_2, C_2).

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_{\delta_2}$, $\mathcal{B}_{\delta_2}$, Γ_{δ_2}, les fonctions inverses de $\frac{\varepsilon}{\mu}$ au module descendant h du tableau (10), par $\mathcal{A}_{\alpha_2}$, $\mathcal{B}_{\alpha_2}$, Γ_{α_2}, les fonctions de $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ au module ascendant g du tableau (11), par A_2, B_2, C_2, les fonctions de ε au module primitif k, les formules des deux tableaux (10) et (11) résolvent respectivement les équations suivantes :

$$\varepsilon = \int_1^{A_2} \frac{dA_2}{\sqrt{A_2^2 - k^2}\sqrt{A_2^2 - 1}} \left\{ \begin{aligned} &= \mu \int_1^{\mathcal{A}_{\delta_2}} \frac{d\mathcal{A}_{\delta_2}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\delta_2}^2 - h^2}\sqrt{\mathcal{A}_{\delta_2}^2 - 1}} \\ &= \lambda \int_1^{\mathcal{A}_{\alpha_2}} \frac{d\mathcal{A}_{\alpha_2}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\alpha_2}^2 - g^2}\sqrt{\mathcal{A}_{\alpha_2}^2 - 1}}, \end{aligned} \right.$$

$$(12)\quad \varepsilon = \int_{k'}^{B_2} \frac{dB_2}{\sqrt{B_2^2 - k'^2}\sqrt{B_2^2 + k^2}} \left\{ \begin{aligned} &= \mu \int_{h'}^{\mathcal{B}_{\delta_2}} \frac{d\mathcal{B}_{\delta_2}}{\sqrt{\mathcal{B}_{\delta_2}^2 - h'^2}\sqrt{\mathcal{B}_{\delta_2}^2 + h^2}} \\ &= \lambda \int_{g'}^{\mathcal{B}_{\alpha_2}} \frac{d\mathcal{B}_{\alpha_2}}{\sqrt{\mathcal{B}_{\alpha_2}^2 - g'^2}\sqrt{\mathcal{B}_{\alpha_2}^2 + g^2}}, \end{aligned} \right.$$

$$\varepsilon = \int_0^{C_2} \frac{dC_2}{\sqrt{C_2^2 + 1}\sqrt{C_2^2 + k'^2}} \left\{ \begin{aligned} &= \mu \int_0^{\Gamma_{\delta_2}} \frac{d\Gamma_{\delta_2}}{\sqrt{\Gamma_{\delta_2}^2 + 1}\sqrt{\Gamma_{\delta_2}^2 + h'^2}} \\ &= \lambda \int_0^{\Gamma_{\alpha_2}} \frac{d\Gamma_{\alpha_2}}{\sqrt{\Gamma_{\alpha_2}^2 + 1}\sqrt{\Gamma_{\alpha_2}^2 + g'^2}}, \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit aisément des différentielles (6), § 27.

Donc enfin, pour transformer la transcendante ε, on peut appliquer l'une ou l'autre des deux transformations descendante et ascendante, à l'une quelconque des neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i); les coefficients μ ou λ, les modules h ou g auront les mêmes valeurs dans tous les cas, quoique étant exprimés d'une manière différente d'un groupe à l'autre.

§ CXXXVIII.

GÉNÉRALISATION DES TRANSFORMATIONS.

A chaque valeur du nombre entier impair p correspondent, pour la transcendante ε, deux transformations dites *du degré* p, et qui sont, l'une descendante, l'autre ascendante. Pour opérer ces transformations, on peut exprimer la transcendante, à l'aide de l'une quelconque des neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i), par la première intégrale de l'une des neuf équations (3), (8), (12), et la fonction inverse transformée sera donnée par l'une des neuf formules (1), (6), (10) au module descendant h, ou par l'une des neuf formules (2), (7), (11) au module ascendant g. Le problème de la multiplication de la transcendante se résoudra en appliquant successivement deux transformations du même degré, la première descendante, la seconde ascendante, à la même fonction inverse, quelle que soit d'ailleurs cette fonction.

§ CXXXIX.

ÉCHELLE DESCENDANTE.

Soit $x = F(\varepsilon; k)$ la fonction inverse que l'on adopte ; une première transformation descendante donnera $y = F\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right)$, qui, par une seconde tranformation aussi descendante, donnera $y_1 = F\left(\frac{\varepsilon}{\mu\mu_1}; h_1\right)$, qui, par une troisième transformation encore descendante, donnera $y_2 = F\left(\frac{\varepsilon}{\mu\mu_1\mu_2}; h_2\right)$; et ainsi de suite. Les degrés de ces transformations peuvent être les mêmes ou tous égaux à p; ils peuvent être différents ou successivement égaux à $p, p_1, p_2, \ldots$ Dans tous les cas, la suite des modules $k, h, h_1, h_2, \ldots$ formera ce qu'on appelle une *échelle descendante*. Cette suite convergera vers zéro, et l'on pourra la prolonger jusqu'à un terme h_i aussi petit que l'on voudra. Alors la fonction inverse $y_i = F\left(\frac{\varepsilon}{\mu\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}; h_i\right)$ aura très-sensiblement la même valeur que dans le système correspondant à $k = 0$, analysé aux §§ 96 et 97; si l'on désigne par θ la variable de cette dernière fonction inverse, on aura, à très-peu près,

$$\varepsilon = \mu\mu_1\mu_2\ldots\mu_i.\theta, \tag{13}$$

et, pour obtenir une équation d'où l'on puisse tirer θ, on égalera l'une à l'autre la dernière transformée $y_i = F(\theta; h_i)$ exprimée en $x = F(\varepsilon; k)$, et la fonction inverse $F(\theta; 0)$ appartenant au système de $k = 0$. Par exemple, d'après le § 97, cette équation finale sera

$$\sin\theta = \frac{y_i}{h_i}, \quad \text{si F est A},$$

$$\cos\theta = \frac{y_i}{h_i}. \quad \text{si F est B},$$

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{e^\theta + e^{-\theta}} = y_i, & \text{si F est } A_1 \text{ ou } B_1, \\ \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = y_i, & \text{si F est } C_1, \\ \text{séc}\,\theta = y_i, & \text{si F est } A_2 \text{ ou } B_2, \\ \text{tang}\,\theta = y_i, & \text{si F est } C_3, \end{cases}$$

et, pour chaque valeur de $x = F(\varepsilon; k)$, on aura à résoudre une équation transcendante afin d'obtenir la valeur correspondante de θ qui, substituée dans l'équation (13), donnera ε.

§ CXL.

ÉCHELLE ASCENDANTE.

Pareillement, si l'on fait subir à la même fonction inverse $x = F(\varepsilon; k)$ une suite de transformations, toutes ascendantes, du même degré ou de degrés différents, elles donneront successivement $y = F\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right)$, $y_1 = F\left(\frac{\varepsilon}{\lambda\lambda_1}; g_1\right)$, $y_2 = F\left(\frac{\varepsilon}{\lambda\lambda_1\lambda_2}; g_2\right)$,.... La suite des modules k, g, g_1, $g_2, \ldots$ formera ce qu'on appelle une *échelle ascendante*. Cette suite convergera vers l'unité, et l'on pourra la prolonger jusqu'à un terme g_i, tel que $1 - g_i$ soit aussi petit que l'on voudra. Alors la fonction inverse $y_i = F\left(\frac{\varepsilon}{\lambda\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i}; g_i\right)$ aura très-sensiblement la même valeur que dans le système correspondant à $k = 1$, analysé aux §§ 100 et 101; si donc on désigne par ψ la variable de cette dernière fonction inverse, on aura, à très-peu près,

$$\varepsilon = \lambda\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i.\psi; \tag{15}$$

et, pour obtenir une équation d'où l'on puisse tirer ψ, on égalera l'une à l'autre la dernière transformée $y_i = F(\psi; g_i)$ exprimée en $x = F(\varepsilon; k)$, et la fonction inverse $F(\psi; 1)$ appartenant au système de $k = 1$. Par exemple, d'après le § 101, cette équation finale sera

$$\sin\psi = \frac{y_i}{g_i}, \quad \text{si F est } B_1,$$

$$\cos\psi = \frac{y_i}{g_i}, \quad \text{si F est } C_1,$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\frac{e^{\psi}-e^{-\psi}}{e^{\psi}+e^{-\psi}}=y_i, &&\text{si F est A},\\ &\frac{2}{e^{\psi}+e^{-\psi}}=y_i, &&\text{si F est B ou C},\\ &\frac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{e^{\psi}-e^{-\psi}}=y_i, &&\text{si F est } A_2,\\ &\frac{2}{e^{\psi}-e^{-\psi}}=y_i, &&\text{si F est } B_2 \text{ ou } C_2; \end{aligned}$$

et, pour chaque valeur de $x = F(\varepsilon; k)$, on aura encore à résoudre une équation transcendante afin d'obtenir la valeur correspondante de ψ qui, substituée dans l'équation (15), donnera ε.

§ CXLI.

PROBLÈME DES ÉCHELLES.

Avant les découvertes d'Abel et de Jacobi, on attribuait une importance extrême à l'établissement des échelles de modules, soit descendantes, soit ascendantes, et l'on ne connaissait qu'un petit nombre de transformations, dont le degré ne surpassait pas 5. Ce qui précède montre que le nombre des transformations et des échelles, utilisables pour évaluer approximativement les transcendantes elliptiques, est actuellement infini. On a ainsi la solution générale d'un problème, jadis fameux, dont Euler, Lagrange, Legendre surtout, se sont tant occupés, et dont ils ne possédaient que des cas particuliers, édifiés à grand'peine.

APPENDICE

A LA DOUZIÈME LEÇON.

Avant d'aborder les applications physicomathématiques des fonctions inverses (A_i, B_i, C_i), il importait de résumer succinctement leurs propriétés communes et diverses. Or les formules (1) et (2), (6) et (7), (10) et (11), établies dans la leçon qui précède, sont toutes vérifiables à l'aide des mêmes propriétés, qu'elles rapprochent et passent en revue de la manière la plus simple et la plus complète. La vérification directe de ces six groupes de formules pourra donc remplacer le résumé que nous jugions nécessaire.

Il faut premièrement rendre plus commodes et même compléter les tableaux (10) et (11), pages 84 et 85, destinés à donner les séries des valeurs de la variable, qui annulent et rendent infinies les fonctions inverses. On atteint le but en remplaçant, dans ces tableaux, tous les multiples $4i$ et $4j$ qui s'y trouvent par $2i$ et $2j$, tous les multiples $(4i+1)$ et $(4j+1)$ par $(2i+1)$ et $(2j+1)$; ces entiers, pairs et impairs, pouvant être ou positifs ou négatifs.

En effet, si l'on considère ces tableaux tels qu'ils sont, on peut prendre les entiers i et j positifs ou négatifs; on peut aussi changer le signe des parenthèses sans altérer les seconds membres. Or si, dans un des multiples $(4i+1)$ ou $(4j+1)$ on change le signe de i ou de j, puis le signe de la parenthèse qui contient ce multiple, il deviendra $(4i-1)$ ou $(4j-1)$; un nombre impair quelconque peut donc le remplacer.

D'un autre côté, les fonctions A, B, B_1, C_1 s'annulent deux fois dans leurs périodes réelles qui sont à quatre quadrants, savoir : A pour o et $2K$, B pour K et $3K$, B_1 pour o et $2K'$, C_1 pour K' et $3K'$. Pareillement les fonctions A_2, B_2 sont infinies deux fois dans leur période réelle qui est à quatre quadrants, quand $\varepsilon = K$ et quand $\varepsilon = 3K$. Ce qui double les séries pour les fonctions précédentes, et par suite pour toutes les autres, d'après les liaisons ou les passages indiqués aux §§ 63 et 64. De là résulte que les $4i$ et $4j$ doivent être remplacés par $2i$ et $2j$, non-seulement dans les multiples impairs, mais aussi dans les multiples pairs.

En un mot, si, pour une valeur quelconque de ε au tableau (6), § 61, les périodes réelles ou imaginaires sont de deux sortes, à quatre quadrants et à deux seulement, dans les séries des valeurs qui annulent et rendent infinies les fonctions inverses, toutes les périodes, sans exception, sont à deux quadrants. Telle est la règle simple et commode qui servira de point de départ à toutes les vérifications qui vont suivre.

D'après cette règle, les séries des valeurs qui rendent infinies les (A_i, B_i, C_i) sont au nombre de trois seulement, une pour chaque indice. Mais les séries des valeurs qui annulent les neuf fonctions restent distinctes.

Pour simplifier, F_i représentera une quelconque des fonctions inverses avec son indice, et pour faciliter les renvois, les lettres suivantes désigneront les formules employées, savoir :

L : (13), § 42, donnant les $F(K-\varepsilon)$ par les $F(\varepsilon)$;
M : (3), § 67, donnant les $F(K-\varepsilon)$ par les $F_2(\varepsilon)$;
N : (7), § 62, donnant les $F(K-\varepsilon)$ par les $F'_1(\varepsilon)$;
P : (9), § 62, des transformations complémentaires;
Q : (25), § 78, donnant les coF_i par les F_i;
R : (13), (14), (15), § 54, des transformations réelles;
I : (5), (5 *bis*), § 60, des transformations imaginaires.

Aux formules Q, il faut joindre les suivantes, que nous désignerons par Q′, et qui donnent les $\mathrm{co}\,F_i(\varepsilon\sqrt{-1})$ à l'aide des $F'_i(\varepsilon)$ ou des $\mathrm{co}\,F'_i(\varepsilon)$:

$$\mathrm{co}A(\varepsilon\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\frac{B'(\varepsilon)}{A'(\varepsilon)} = \mathrm{co}C'(\varepsilon),$$

$$\mathrm{co}B(\varepsilon\sqrt{-1}) = k'\,\frac{C'(\varepsilon)}{A'(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{co}B'(\varepsilon),$$

$$\mathrm{co}C(\varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{k'}{A'(\varepsilon)} = -\,\mathrm{co}A'(\varepsilon);$$

$$\mathrm{co}A_1(\varepsilon\sqrt{-1}) = k\,\frac{A'_1(\varepsilon)}{B'_1(\varepsilon)} = \mathrm{co}C'_1(\varepsilon),$$

$$\mathrm{co}B_1(\varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{kk'}{B'_1(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{co}B'_1(\varepsilon),$$

$$\mathrm{co}C_1(\varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{k'}{\sqrt{-1}}\,\frac{C'_1(\varepsilon)}{B'_1(\varepsilon)} = -\,\mathrm{co}A'_1(\varepsilon);$$

$$\mathrm{co}A_2(\varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{k}{C'_2(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{co}C'_2(\varepsilon),$$

$$\mathrm{co}B_2(\varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{k}{\sqrt{-1}}\,\frac{A'_2(\varepsilon)}{C'_2(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{co}B'_2(\varepsilon),$$

$$\mathrm{co}C_2(\varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{B'_2(\varepsilon)}{C'_2(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{co}A'_2(\varepsilon).$$

On les obtient en employant successivement les (Q, I, R, Q). Il importe de remarquer que toutes ces valeurs changent de signe avec ε : dans la première case par $A'(\varepsilon)$, dans la seconde par $B'_1(\varepsilon)$, dans la troisième par $C'_2(\varepsilon)$. Il en est de même des $\mathrm{co}\,F_i$ donnés par les formules Q : la première ligne changeant de signes avec A, la seconde avec B_1, la troisième avec C_2.

Toutes ces préparations faites, si l'on pose

$$x = F_i(\varepsilon;\,k) = F_i(\varepsilon),$$

les six groupes de formules qu'il s'agit de vérifier donnent, en fonction rationnelle de x : soit

$$y = \mathrm{F}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}; h\right);$$

le dénominateur μ et le module h étant tels que

$$\mathrm{K} = \mu p \mathrm{H}, \quad \mathrm{K}' = \mu \mathrm{H}',$$

relations où p est un nombre entier, impair et quelconque : soit

$$y = \mathrm{F}_i\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}; g\right);$$

le dénominateur λ et le module g étant tels que

$$\mathrm{K} = \lambda \mathrm{G}, \quad \mathrm{K}' = \lambda p \mathrm{G}'.$$

Dans le premier cas, ayant posé $\frac{\mathrm{K}}{p} = i$, le dénominateur de y doit s'annuler pour toutes les valeurs distinctes de x, données par le tableau suivant :

$$\mathrm{F}(\mathrm{H}'\sqrt{-1} - 2n\mathrm{H}; h) = \infty, \quad \varepsilon = \mathrm{K}'\sqrt{-1} - 2ni,$$
$$x = \mathrm{F}(\varepsilon) = \mathrm{co}\,\mathrm{F}(2ni);$$

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{H}' + p\mathrm{H}\sqrt{-1} - 2n\mathrm{H}\sqrt{-1}; h) = \infty, \quad \varepsilon = \mathrm{K}' + \mathrm{K}\sqrt{-1} - 2ni\sqrt{-1},$$
$$x = \mathrm{F}_1(\varepsilon) = \mathrm{co}\,\mathrm{F}_1(2ni\sqrt{-1});$$

$$\mathrm{F}_2[(p - 2n)\mathrm{H}; h] = \infty, \quad \varepsilon = (p - 2n)i = \mathrm{K} - 2ni,$$
$$x = \mathrm{F}_2(\varepsilon) = \mathrm{co}\,\mathrm{F}_2(2ni),$$

où n est un nombre entier quelconque, positif ou négatif. (Dans chaque case, la première équation indique une série de valeurs de $\frac{\varepsilon}{\mu}$ qui rendent y infini, la seconde les valeurs correspondantes de ε, la troisième celles de x.) Ces valeurs, les (Q, Q′), et la loi des changements de signes des coF_{i}, justifient complétement les dénominateurs des groupes (1), (6), (10).

Dans le second cas, ayant posé $\frac{\mathrm{K}'}{p} = i'$, le dénominateur de y doit s'annuler pour toutes les valeurs distinctes de x données par le nouveau tableau

$$F[(p-2n)G'\sqrt{-1};g]=\infty,\quad \varepsilon=K'\sqrt{-1}-2ni'\sqrt{-1},$$
$$x=F(\varepsilon)=\mathrm{co}F(2ni'\sqrt{-1});$$

$$F_1(pG'+G_1\sqrt{-1}-2nG';g)=\infty,\quad \varepsilon=K'+K\sqrt{-1}-2ni',$$
$$x=F_1(\varepsilon)=\mathrm{co}F_1(2ni');$$

$$F_2(G-2nG'\sqrt{-1};g)=\infty,\quad \varepsilon=K-2ni'\sqrt{-1},$$
$$x=F_2(\varepsilon)=\mathrm{co}F_2(2ni'\sqrt{-1}).$$

Ces valeurs, les (Q', Q), et la loi des changements de signes des $\mathrm{co}\,F_i$, justifient la composition des dénominateurs dans les groupes (2), (7), (11).

Passons aux numérateurs. Pour les formules (1) qui expriment les F appartenant au module h, on a

$$A(2nH;h)=0,\quad \varepsilon=2ni,$$
$$A(\varepsilon)=A(2ni);$$

$$B[(p-2n)H;h]=0,\quad \varepsilon=(p-2n)i,$$
$$B(\varepsilon)=B(K-2ni)=k'\frac{A(2ni)}{C(2ni)};$$

$$C[H'\sqrt{-1}-(p-2n)H;h]=0,\quad \varepsilon=K'\sqrt{-1}-(p-2n)i,$$
$$C(\varepsilon)=\mathrm{co}C(p-2n)i=\sqrt{-1}\,k'\frac{A(2ni)}{B(2ni)}.$$

[Dans chaque case, la première équation indique une valeur générale de $\frac{\varepsilon}{\mu}$ qui annule y, la seconde la valeur correspondante de ε, la troisième celle de x, ou de $F(\varepsilon)$]. La seconde valeur de $B(\varepsilon)$ résulte des L, celle de $C(\varepsilon)$ des (Q, L). Les trois valeurs définitives s'annulent et changent de signe avec n, par $A(2ni)$; les polynômes variables qui composent les numérateurs des formules (1) sont ainsi complétement justifiés. Les premières valeurs, jointes à la forme générale des dénominateurs, justifient pareillement les formules (23) du § 117.

Pour les formules (6) qui font passer les F_1 du module k au module h, on a

$$A_1[(p-2n)H\sqrt{-1};h]=0,\quad \varepsilon=(p-2n)i\sqrt{-1},$$
$$A_1(\varepsilon)=A_1(p-2n)i\sqrt{-1}=C'_1(p-2n)i;$$

$$B_1(2nH\sqrt{-1};h)=0,\quad \varepsilon=2ni\sqrt{-1},$$
$$B_1(\varepsilon)=B_1(2ni\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,B'_1(2ni);$$

$$C_1(H'-2nH\sqrt{-1};h)=0,\quad \varepsilon=K'-2ni\sqrt{-1},$$
$$C_1(\varepsilon)=C_1(K'-2ni\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,\frac{B'_1(2ni)}{C'_1(2ni)}.$$

Les secondes valeurs de $A_1(\varepsilon)$ et $B_1(\varepsilon)$ résultent des I, celle de $C_1(\varepsilon)$ des (N, I, R). Ces trois valeurs s'annulent et changent de signe avec n, par $B'_1(2ni)$, $C'_1(K)=0$, et parce que $C'_1(p-2n)i$ et $C'_1(p+2n)i$ ont des signes contraires; tous les facteurs variables aux numérateurs des formules (6) sont donc justifiés.

Pour les formules (10) qui transforment les F_2 par le passage au module h, on a

$$A_2[H'\sqrt{-1}-(p-2n)H;h]=0;\quad \varepsilon=K'\sqrt{-1}-(p-2n)i,$$
$$A_2(\varepsilon)=A_2[K'\sqrt{-1}-(p-2n)i]=k\frac{C_2(2ni)}{B_2(2ni)};$$

$$B_2(H'\sqrt{-1}-2nH;h)=0,\quad \varepsilon=K'\sqrt{-1}-2ni,$$
$$B_2(\varepsilon)=B_2(K'\sqrt{-1}-2ni)=\frac{k}{\sqrt{-1}}\,\frac{C_2(2ni)}{A_2(2ni)};$$

$$C_2(2nH;h)=0,\quad \varepsilon=2ni,$$
$$C_2(\varepsilon)=C_2(2ni).$$

La seconde valeur de $A_2(\varepsilon)$ résulte successivement des (P, I, N, R), celle de $B_2(\varepsilon)$ des (P, I, R). Les trois valeurs définitives s'annulent et changent de signe avec n, par $C_2(2ni)$; les numérateurs variables des formules (10) ont ainsi leur justification.

Pour les formules (2) qui expriment les F appartenant au module g, on a

$$A\left(2nG'\sqrt{-1}\,;\,g\right)=0,\quad \varepsilon=2ni'\sqrt{-1},$$

$$A(\varepsilon)=A\left(2ni'\sqrt{-1}\right)=\sqrt{-1}\,k\,\frac{A'(2ni')}{B'(2ni')};$$

$$B\left(G-2nG'\sqrt{-1}\,;\,g\right)=0,\quad \varepsilon=K-2ni'\sqrt{-1},$$

$$B(\varepsilon)=B\left(K-2ni'\sqrt{-1}\right)=\sqrt{-1}\,B'(p-2n)i';$$

$$C\left[G-(p-2n)G'\sqrt{-1}\,;\,g\right]=0,\quad \varepsilon=K-(p-2n)i'\sqrt{-1},$$

$$C(\varepsilon)=C\left[K-(p-2n)i\sqrt{-1}\right]=A'(2ni').$$

La seconde valeur de $A(\varepsilon)$ résulte des (I, R), celle de $B(\varepsilon)$ des (P, N), ainsi que celle de $C(\varepsilon)$. Ces trois valeurs s'annulent et changent de signe avec n, par $A'(2ni')$, $B'(K')=0$, et parce que $B'(p-2n)i'$ et $B'(p+2n)i'$ ont des signes contraires; ce qui justifie tous les facteurs variables, aux numérateurs des formules (2).

Pour les formules (7), qui font passer les F_1 du module k au module g, on aura

$$A_1\left[G\sqrt{-1}+pG'-(p-2n)G';\,g\right]=0,$$

$$\varepsilon=K'+K\sqrt{-1}-(p-2n)i',$$

$$A_1(\varepsilon)=\operatorname{co}A_1(p-2n)i'=\sqrt{-1}\,\frac{B_1(2ni')}{C_1(2ni')},$$

$$B_1(2nG';\,g)=0,\quad \varepsilon=2ni',$$

$$B_1(\varepsilon)=B_1(2ni'),$$

$$C_1\left[(p-2n)G';\,g\right]=0,\quad \varepsilon=(p-2n)i',$$

$$C_1(\varepsilon)=C_1(p-2n)i'.$$

La seconde valeur de $A_1(\varepsilon)$ résulte successivement des (Q, N, R). Les trois valeurs définitives s'annulent et changent de signe avec n par $B_1(2ni')$, $C_1(K') = 0$, et parce que $C_1(p-2n)i'$ et $C_1(p+2n)i'$ ont des signes contraires; tous les facteurs variables aux numérateurs des formules (7) ont ainsi leur justification.

Enfin, pour les formules (11) qui transforment les F_2 par le passage au module g, on a

$$A_2(G + pG'\sqrt{-1} - 2nG'\sqrt{-1}; g) = 0,$$
$$\varepsilon = K + K'\sqrt{-1} - 2ni'\sqrt{-1},$$
$$A_2(\varepsilon) = A_2(K + K'\sqrt{-1} - 2ni'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,C'_2(2ni'),$$

$$B_2[(p-2n)G'\sqrt{-1}; g] = 0, \qquad \varepsilon = (K' - 2ni')\sqrt{-1},$$
$$B_2(\varepsilon) = B^2[(K' - 2ni')\sqrt{-1}] = k'\frac{C'_2(2ni')}{A'_2(2ni')},$$

$$C_2(2nG\sqrt{-1}; g) = 0, \qquad \varepsilon = 2ni'\sqrt{-1},$$
$$C_2(\varepsilon) = C_2(2ni'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,k'\frac{C'_2(2ni')}{B'_2(2ni')}.$$

La seconde valeur de $A_2(\varepsilon)$ résulte des (P, I), celle de $B_2(\varepsilon)$ des (I, M), celle de $C_2(\varepsilon)$ des (I, R). Ces trois valeurs s'annulent et changent de signe avec n, par $C'_2(2ni')$; les numérateurs des formules (11) sont donc justifiés.

De l'ensemble de ces vérifications partielles à une démonstration générale et directe, aussi simple que celle d'Abel, il n'y a qu'un pas. J'évite de le franchir : quand on expose une découverte aussi importante que celle de Jacobi, il faut conserver la méthode de l'inventeur. Remarquons cependant que la solution du problème de la transformation des transcendantes elliptiques peut être résumée en une seule formule, comme celle de la multiplication l'est par la formule (15) au § 55. En effet, en désignant collectivement par F les neuf fonctions inverses, et en se servant des (Q, Q', L, N, R), on déduit successivement les six groupes vérifiés, de la formule unique

$$(a) \qquad F\left(\frac{\varepsilon}{m}; l\right) = MF(\varepsilon)\Pi \frac{F^2(\varepsilon) - \dfrac{\eta}{\text{co}\,F^2(2ne)}}{F^2(\varepsilon) - \text{co}\,F^2(2ne)},$$

le coefficient constant η étant k^2 pour un A_i, $-k^2k'^2$ pour un B_i, k'^2 pour un C_i.

S'agit-il de passer au module descendant h, faisant $m=\mu$, $l=h$, on prend $e=i$ si F est A, B, C, A_2, B_2, ou C_2, et $e=i\sqrt{-1}$ si F est A_1, B_1, ou C_1; puis $M=\mu$ pour A, B, C, C_1, C_2, et $M=\pm\mu$ pour A_1, B_1, A_2, B_2, suivant que $p=4j\pm 1$. S'agit-il de passer au module ascendant g, faisant $m=\lambda$, $l=g$, on prend $e=i'\sqrt{-1}$ si F est A, B, C, A_2, B_2, ou C_2, et $e=i'$ si F est A_1, B_1, ou C_1; puis $M=\lambda$ pour A, A_1, A_2, B_2, C_2, et $M=\pm\lambda$ pour B, C, B_1, C_1, suivant que $p=4j\pm 1$.

Ainsi, l'introduction des trois compléments naturels et des $\text{co}F_i$, §§ 77 et 78, qui permet d'exprimer en une seule les formules primitives d'Euler, ramène aussi à l'unité les formules finales de la transformation, trouvées par Jacobi. Preuve nouvelle qu'un des caractères principaux, le plus essentiel peut-être, des neuf fonctions inverses F, c'est d'avoir toutes des coF, ou d'être toutes infinies pour certaines valeurs finies de la variable, réelles ou imaginaires.

Il n'est pas inutile d'observer que la formule (a), qui groupe les neuf fonctions inverses par les indices, quand il s'agit d'assigner le complément naturel ou le coF, les groupe au contraire par les lettres, lorsqu'il faut choisir la valeur de la constante η. Le premier classement est celui qui sépare les axes des trois familles de surfaces isothermes, le second celui qui distingue les valeurs des coordonnées rectilignes (x, y, z), (3) § 81. En outre, le groupe des fonctions impaires (A, B_1, C_2), qui fournit exclusivement

13

les dénominateurs des co F, est aussi nettement indiqué dans le système des coordonnées thermométriques (α, β, γ) par l'équation remarquable

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 (A^2 + B_1^2 + C_2^2),$$

que l'on déduit sans peine des valeurs citées. Ces coïncidences, et d'autres encore, ne font que constater la liaison intime qui existe entre les définitions géométriques et les propriétés analytiques des fonctions étudiées.

TREIZIÈME LEÇON.

Objet des dernières leçons. — Problème des températures stationnaires. — Conductibilités ; flux de chaleur. — Démonstration directe de l'équation générale de l'équilibre des températures : — en coordonnées rectilignes — en coordonnées sphériques — en coordonnées elliptiques.

---

§ CXLII.

OBJET D'UNE NOUVELLE ÉTUDE.

L'objet principal de nos leçons est de rendre évident un principe dont voici l'énoncé. Les propriétés communes et diverses des fonctions trigonométriques et exponentielles, telles que la périodicité réelle pour les premières, la périodicité imaginaire pour les secondes, et, pour toutes, les règles de l'addition et de la multiplication des transcendantes, ne sont que les traces, ou les résidus, des propriétés plus générales et plus complètes, appartenant aux fonctions elliptiques ou inverses (A_i, B_i, C_i).

Or, pour mettre ce principe hors de doute, une dernière vérification est indispensable. Les fonctions trigonométriques les plus simples, les sinus et cosinus, jouissent de la propriété, si importante pour les applications, de composer diverses séries capables de représenter une fonction quelconque entre certaines limites de la variable. Lagrange et Fourier, Legendre et Laplace, ont successivement découvert et utilisé plusieurs séries de cette nature, qui leur ont permis d'aborder et de résoudre une multitude de questions importantes de physique mathématique et de mécanique céleste. Telle est la propriété dont il faut trouver l'analogue, ou le germe, dans le système général des fonctions inverses (A_i, B_i, C_i).

§ CXLIII.

PROBLÈME GÉNÉRAL.

Pour y parvenir, il suffit d'étudier un des problèmes généraux les plus simples de la théorie analytique de la chaleur, celui qui concerne l'équilibre des températures d'un corps solide homogène, soumis à des sources calorifiques constantes. La solution de ce problème pour le prisme rectangle conduit aux séries de Fourier. La solution pour la sphère introduit les séries de Laplace. Enfin c'est en résolvant le même problème pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux, qu'on arrive aux séries correspondantes des fonctions elliptiques.

Il s'agit, dans les trois cas, d'intégrer, sous certaines conditions, l'équation aux différences partielles $\Delta_2 V = 0$, du § 1, exprimée en coordonnées rectilignes pour le prisme rectangle, en coordonnées sphériques pour la sphère, en coordonnées elliptiques pour l'ellipsoïde. Les deux dernières expressions se déduiraient de la première à l'aide des formules de transformation (27), § 105, et (3), § 81. Mais on peut établir successivement ces trois équations, en partant directement pour chacune du système de coordonnées qu'elle emploie; méthode que nous préférons, et que nous allons suivre. Facilement applicable à tout autre système de coordonnées curvilignes, cette méthode directe a l'inappréciable avantage d'éviter tout passage par l'antique système des cordonnées rectilignes : instrument désormais impuissant et stérile, dont l'emploi abusif sera plutôt un obstacle qu'un secours pour les progrès futurs des diverses branches de la physique mathématique.

Il est nécessaire de rappeler d'abord deux propositions élémentaires de la théorie analytique de la chaleur, qui définissent et évaluent les conductibilités et les flux de chaleur.

§ CXLIV.

CONDUCTIBILITÉS. FLUX DE CHALEUR.

I. Un mur solide homogène est compris entre deux faces planes, parallèles et indéfinies; ses faces sont entretenues à des températures fixes a et b, a étant plus grand que b. Soient e l'épaisseur de ce mur, et q la conductibilité pour la chaleur de la substance qui le compose. Imaginons une section parallèle aux faces, et sur cette section une portion de surface Ω. Le mur étant en équilibre de température, il y aura un flux constant de chaleur, allant de la paroi qui possède la température a vers la paroi plus froide ayant la température b. Cela posé, nous empruntons au Cours de physique cette loi, que la quantité de chaleur qui traversera l'aire Ω, dans un temps t, aura pour expression

$$\Omega\, tq \frac{a-b}{e}. \tag{1}$$

Si e est l'unité de longueur, Ω l'unité de surface, t l'unité de temps, et si la différence $a-b$ est l'unité de température, cette quantité de chaleur se réduit à q. On a ainsi la véritable définition, ou la mesure exacte, du coefficient désigné sous le nom de *conductibilité*.

§ CXLV.

FLUX DE CHALEUR ÉLÉMENTAIRE.

II. Un corps solide et homogène, de forme quelconque, est soumis à des sources de chaleur constant et diverses;

la température stationnaire V de chacun de ses points est supposée connue. On considère, dans l'intérieur du corps, un élément plan, dont l'aire infiniment petite est ω, et l'on se propose d'évaluer la quantité de chaleur qui traverse cet élément pendant l'unité de temps. Soient N la normale au centre de l'élément, comptée à partir d'une origine arbitraire, et dN l'accroissement de cette normale. On imagine une nouvelle face ω' située à la distance normale $N+dN$, et formant avec ω un mur d'épaisseur infiniment petite dN. Alors V étant la température de ω, $V+dV$ sera celle de ω', et, d'après la loi physique qui précède, la quantité de chaleur cherchée aura pour expression

$$\omega q \frac{V-(V+dV)}{dN},$$

ou simplement

$$(2) \qquad \omega q\left(-\frac{dV}{dN}\right).$$

§ CXLVI.

POUR LE PRISME RECTANGLE.

Le corps solide étant rapporté à un système de coordonnées rectilignes et orthogonales (x, y, z), considérons dans son intérieur un élément de volume $dxdydz$. Soient

$$\omega = dydz, \quad \omega_1 = dzdx, \quad \omega_2 = dxdy,$$

les trois faces de cet élément qui forment le sommet le plus voisin de l'origine des coordonnées, et ω', ω'_1, ω'_2 les trois faces opposées. Il s'agit d'évaluer les quantités de chaleur qui traversent ces six faces dans l'unité de temps.

D'après l'expression (2), le flux de chaleur qui entre dans l'élément par la face ω est

$$\omega q\left(-\frac{dV}{dx}\right), \quad \text{ou} \quad q dydz\left(-\frac{dV}{dx}\right):$$

on aura évidemment la quantité de chaleur qui sort de l'élément par la face ω', en ajoutant à l'expression précédente sa différentielle en x, ce qui donne

$$qdydz\left(-\frac{dV}{dx}-\frac{d^2V}{dx^2}dx\right);$$

l'excès du flux entrant par ω sur le flux sortant par ω' est, après réduction,

$$qdxdydz\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right).$$

De la même manière, le couple des faces (ω_1, ω'_1) donnera l'excès

$$qdxdydz\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right),$$

et le couple (ω_2, ω'_2) celui-ci :

$$qdxdydz\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right).$$

Or la somme de ces trois excès, ou de ces trois gains de chaleur, doit être nulle, puisque la température de l'élément est stationnaire; on a donc

$$(3)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

Et telle est l'équation générale de l'équilibre des températures, exprimée en coordonnées rectilignes, que nous avons posée au § 1.

§ CXLVII.

POUR LA SPHÈRE.

Le corps solide étant rapporté au système habituel des coordonnées sphériques, qui sont : la longitude ψ, la latitude θ, et le rayon ρ, considérons dans son intérieur un élément de volume $\rho\cos\theta\, d\psi.\rho\, d\theta.d\rho$, compris entre deux plans méridiens de longitudes ψ et $\psi+d\psi$, deux cônes de latitudes θ et $\theta+d\theta$, deux sphères de rayons ρ et $\rho+d\rho$. Soient

$$\omega=\rho\, d\theta\, d\rho,\quad \omega_1=\rho\cos\theta\, d\psi\, d\rho,\quad \omega_2=\rho^2\cos\theta\, d\psi\, d\theta,$$

les trois faces de cet élément qui forment le sommet où les trois coordonnées ont les moindres valeurs, et ω', ω'_1, ω'_2, les trois faces opposées. Il s'agit d'évaluer les quantités de chaleur qui traversent ces six faces dans l'unité de temps.

D'après l'expression (2), le flux de chaleur qui entre dans l'élément par la face ω est le produit

$$q\rho\, d\theta\, d\rho\left(-\frac{d\mathrm{V}}{\rho\cos\theta\, d\psi}\right)\quad \text{ou}\quad \frac{q\, d\theta\, d\rho}{\cos\theta}\left(-\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right);$$

on aura évidemment le flux de chaleur qui sort par ω', en ajoutant à l'expression précédente sa différentielle en ψ, ce qui donne

$$\frac{q\, d\theta\, d\rho}{\cos\theta}\left(-\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}-\frac{d^2\mathrm{V}}{d\psi^2}\,d\psi\right);$$

l'excès du flux entrant par ω sur le flux sortant par ω' est, après réduction,

$$q\, d\theta\, d\psi\, d\rho\cdot\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{d^2\mathrm{V}}{d\psi^2}.$$

Le flux entrant par ω_1 étant

$$q\rho\cos\theta\, d\psi\, d\rho\left(-\frac{d\mathrm{V}}{\rho\, d\theta}\right)\quad \text{ou}\quad q\, d\psi\, d\rho\left(-\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\cos\theta\right),$$

celui qui sort par ω'_1 sera

$$q\, d\psi\, d\rho\left(-\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\cos\theta-\frac{d\,\dfrac{d\mathrm{V}}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}\,d\theta\right);$$

d'où résulte un second excès égal à

$$q\,d\theta\,d\psi\,d\rho\cdot\frac{d\,\frac{dV}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}.$$

Le flux entrant par ω_2 étant

$$q\rho^2\cos\theta\,d\psi\,d\theta\left(-\frac{dV}{d\rho}\right)\quad\text{ou}\quad q\cos\theta\,d\psi\,d\theta\left(-\rho^2\frac{dV}{d\rho}\right),$$

celui qui sort par ω'_2 sera

$$q\cos\theta\,d\psi\,d\theta\left(-\rho^2\frac{dV}{d\rho}-\frac{d\rho^2\frac{dV}{d\rho}}{d\rho}d\rho\right);$$

d'où résulte un troisième et dernier excès égal à

$$q\,d\theta\,d\psi\,d\rho\cdot\frac{d\rho^2\frac{dV}{d\rho}}{d\rho}\cos\theta.$$

Or la somme des trois excès, ou des trois gains de chaleur, doit être nulle, puisque la température de l'élément est stationnaire; égalant donc cette somme à zéro, supprimant le facteur commun $q\,d\psi\,d\theta\,d\rho$, et divisant par $\cos\theta$, on aura

$$(4)\qquad \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d^2V}{d\psi^2}+\frac{1}{\cos\theta}\frac{d\,\frac{dV}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}+\frac{d\rho^2\frac{dV}{d\rho}}{d\rho}=0.$$

Telle est l'équation générale de l'équilibre des températures, exprimée en coordonnées sphériques.

Si l'on représente par μ le sinus de la latitude, on pourra prendre μ au lieu de θ, pour la seconde coordonnée sphérique, et puisque l'on a

$$\sin\theta=\mu,\quad \cos\theta\,d\theta=d\mu,\quad \cos^2\theta=1-\mu^2,$$

l'équation (4) deviendra

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{d^2V}{d\psi^2}}{1-\mu^2}+\frac{d(1-\mu^2)\dfrac{dV}{d\mu}}{d\mu}+\frac{d\rho^2\dfrac{dV}{d\rho}}{d\rho}=0,$$

forme adoptée par Laplace.

§ CXLVIII.

POUR L'ELLIPSOIDE EN GÉNÉRAL.

Le corps solide étant rapporté au système des coordonnées thermométriques (α, β, γ) du § 81, considérons dans son intérieur un élément de volume $ds\,ds_1\,ds_2$, compris entre deux surfaces infiniment voisines au paramètre α, deux au paramètre β, deux au paramètre γ. Soient

$$\omega = ds_1\,ds_2,\quad \omega_1 = ds_2\,ds,\quad \omega_2 = ds\,ds_1,$$

les trois faces de cet élément qui forment le sommet où les paramètres ont les moindres valeurs, et ω', ω'_1, ω'_2 les trois faces opposées. Il s'agit d'évaluer les quantités de chaleur qui traversent ces six faces dans l'unité de temps. Rappelons que dans le système de coordonnées actuelles, on a les valeurs

$$ds = c\,D_1 D_2\,d\alpha,\quad ds_1 = c\,D_2 D\,d\beta,\quad ds_2 = c\,DD_1\,d\gamma,$$

[(5), § 83)]; les D_i étant donnés par le tableau (2), § 80, qui montre que D est indépendant de α, D_1 de β, D_2 de γ.

D'après l'expression (2), le flux de chaleur qui entre dans l'élément par la face ω est

$$\omega q\left(-\frac{dV}{ds}\right),\quad \text{ou}\quad q\,ds_1\,ds_2\left(-\frac{dV}{ds}\right),$$

ou

$$c^2 q\,D^2 D_1\,D_2\,d\beta\,d\gamma\left(-\frac{dV}{c\,D_1 D_2\,d\alpha}\right),$$

ou enfin

$$cq\,D^2 d\beta\, d\gamma \left(-\frac{dV}{d\alpha}\right);$$

on aura évidemment la quantité de chaleur qui sort de l'élément par la face ω', en ajoutant à l'expression précédente sa différentielle en α, ce qui donne

$$cq\,D^2 d\beta\, d\gamma \left(-\frac{dV}{d\alpha} - \frac{d^2V}{d\alpha^2}d\alpha\right),$$

puisque D ne varie pas avec α; l'excès du flux entrant par ω sur le flux sortant par ω', est, après réduction,

$$cq\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,.\,D^2\frac{d^2V}{d\alpha^2}.$$

De la même manière, le couple des faces (ω_1, ω'_1) donnera l'excès

$$cq\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,.\,D_1^2\frac{d^2V}{d\beta^2},$$

et le couple (ω_2, ω'_2) celui-ci

$$cq\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,.\,D_2^2\frac{d^2V}{d\gamma^2}.$$

Or la somme de ces trois excès ou de ces trois gains de chaleur doit être nulle, puisque la température de l'élément est stationnaire; on a donc nécessairement

$$(6)\qquad D^2\frac{d^2V}{d\alpha^2} + D_1^2\frac{d^2V}{d\beta^2} + D_2^2\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0.$$

Telle est l'équation générale de l'équilibre des températures, exprimée dans le système des coordonnées thermométriques (α, β, γ).

Les D_i peuvent être exprimés indifféremment par les A_i, par les B_i ou par le C_i. Adoptant le premier mode, et supprimant l'indication de la variable qui sera toujours α

pour A, β pour A_1, γ pour A_2, l'équation (6) deviendra

$$(7) \quad (A_2^2 - A_1^2)\frac{d^2V}{d\alpha^2} + (A_2^2 - A^2)\frac{d^2V}{d\beta^2} + (A_1^2 - A^2)\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0.$$

Enfin si l'on désigne par

$$(8) \qquad \nu = cA, \quad \mu = cA_1, \quad \rho = cA_2;$$

les premiers axes des trois familles de surfaces conjuguées, il résulte du § 93 que les coordonnées thermométriques (α, β, γ) seront les transcendantes

$$(9) \qquad \begin{aligned} \alpha &= c\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}, \\ \beta &= c\int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}, \\ \gamma &= c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho^2}}, \end{aligned}$$

et l'équation (7) multipliée par c^2 prendra la forme

$$(10) \quad (\rho^2-\mu^2)\frac{d^2V}{d\alpha^2} + (\rho^2-\nu^2)\frac{d^2V}{d\beta^2} + (\mu^2-\nu^2)\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0,$$

plus commode dans les applications.

Pour la recherche que nous entreprenons, il importe d'exprimer aussi l'équilibre des températures dans deux autres systèmes de coordonnées : celui des ellipsoïdes planétaires, § 97, et celui des ellipsoïdes ovaires, § 101. Ces systèmes n'étant que des cas particuliers des coordonnées elliptiques, les nouvelles équations se déduisent de l'équation générale (7) ainsi qu'il suit.

§ CXLIX.

POUR L'ELLIPSOIDE PLANÉTAIRE.

Si au lieu de la coordonnée thermométrique α on adopte pour paramètre la fonction inverse intermédiaire θ du § 96, on aura

$$A = k\sin\theta,\quad d\alpha = \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\frac{d\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\dfrac{dV}{d\theta}}{d\theta},$$

et l'équation (7) prendra la forme

$$(A_2^2 - A_1^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\frac{d\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\dfrac{dV}{d\theta}}{d\theta}$$

$$+ (A_2^2 - k^2\sin^2\theta)\frac{d^2V}{d\beta^2} + (A_1^2 - k^2\sin^2\theta)\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0.$$

Faisant maintenant $k = 0$, on passera au système des ellipsoïdes planétaires dans lequel $A_2 = \text{séc}\gamma$, $A_1 = H\,\text{séc}\beta$; et l'équation précédente deviendra

$$(11)\quad (\text{séc}^2\gamma - H\,\text{séc}^2\beta)\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2}\,\text{séc}^2\gamma + \frac{d^2V}{d\gamma^2}\,H\,\text{séc}^2\beta = 0;$$

telle est l'équation de l'équilibre des températures exprimée à l'aide des coordonnées du § 97.

On peut mettre les coefficients de cette équation (11) sous une autre forme plus commode. Désignant le demi-diamètre équatorial par λ pour les hyperboloïdes à une nappe, par ρ pour les ellipsoïdes, il résulte des §§ 16 et 15, que les paramètres thermométriques β et γ seront les transcendantes

$$(12)\qquad \beta = c\int_\lambda^c \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}},\quad \gamma = c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-c^2}},$$

lesquelles donnent inversement

$$(13)\qquad \lambda = \frac{c}{E(\beta)} = c\,H\,\text{séc}\,\beta,\quad \rho = \frac{c}{\cos\gamma} = c\,\text{séc}\,\gamma.$$

D'après cela, multipliant l'équation (11) par c^2, et introduisant λ et ρ, elle deviendra

$$(14)\qquad (\rho^2 - \lambda^2)\frac{d^2V}{d\theta^2} + \rho^2\frac{d^2V}{d\beta^2} + \lambda^2\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0,$$

ρ et λ étant respectivement les fonctions inverses (13) des transcendantes β et γ (12) prises pour coordonnées.

§ CL.

POUR L'ELLIPSOIDE OVAIRE.

Si, au lieu de la coordonnée thermométrique β, on adopte pour paramètre la fonction inverse intermédiaire ψ du § 100, on aura

$$A_1 = \sqrt{1 - k'^2\cos^2\psi},\qquad d\beta = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k'^2\cos^2\psi}},$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \sqrt{1 - k'^2\cos^2\psi}\,\frac{d\sqrt{1 - k'^2\cos^2\psi}\,\frac{dV}{d\psi}}{d\psi},$$

et l'équation (7) prendra la forme

$$(C_2^2 + C^2)\sqrt{1 - k'^2\cos^2\psi}\,\frac{d\sqrt{1 - k'^2\cos^2\psi}\,\frac{dV}{d\psi}}{d\psi}$$

$$+ (C_2^2 + k'^2\cos^2\psi)\frac{d^2V}{d\alpha^2} + (C^2 - k'^2\cos^2\psi)\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0.$$

Faisant maintenant $k' = 0$, on passera au système des ellipsoïdes ovaires, dans lequel $C_2 = H\,\text{coséc}\,\gamma$, $C = H\,\text{séc}\,\alpha$;

et l'équation précédente deviendra

$$(15)\quad \frac{d^2V}{d\alpha^2}\,\mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}^2\gamma + (\mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}^2\gamma + \mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}^2\alpha)\frac{d^2V}{d\psi^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2}\,\mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}^2\alpha = 0.$$

Telle est l'équation de l'équilibre des températures exprimée à l'aide des coordonnées du § 101.

On peut mettre les coefficients de l'équation (15) sous une autre forme. Désignant le demi-axe équatorial par ν', pour les hyperboloïdes à deux nappes, par ρ' pour les ellipsoïdes, il résulte des §§ 17 et 18 que les paramètres termométriques α et γ seront les transcendantes

$$(16)\qquad \alpha = c\int_{\nu'}^{c}\frac{d\nu'}{\nu'\sqrt{c^2-\nu'^2}},\qquad \gamma = c\int_{\rho'}^{\infty}\frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{c^2+\rho'^2}},$$

lesquelles donnent inversement

$$(17)\qquad \nu' = \frac{c}{\mathrm{E}(\alpha)} = c\,\mathrm{H}\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\alpha,\qquad \rho' = \frac{c}{\mathcal{E}(\gamma)} = c\,\mathrm{H}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\gamma.$$

D'après cela, multipliant l'équation (15) par c^2 et introduisant ν' et ρ', on aura

$$(18)\qquad \rho'^2\frac{d^2V}{d\alpha^2} + (\rho'^2+\nu'^2)\frac{d^2V}{d\psi^2} + \nu'^2\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0,$$

ν' et ρ' étant respectivement les fonctions inverses (17) des transcendantes α et γ (16) prises pour coordonnées.

§ CLI.

FLUX DE CHALEUR ELLIPSOIDAUX.

Terminons cette leçon par deux applications de l'expression du flux de chaleur ellipsoïdal. Une enveloppe solide est limitée par deux ellipsoïdes isothermes; la paroi intérieure au paramètre γ_i est entretenue à une température fixe, prise pour unité; la paroi extérieure au paramètre γ_e

a aussi une température fixe et constante, prise pour zéro; la température V qui existe sur un ellipsoïde intérieur au paramètre γ est, d'après le § 2,

$$V = \frac{\gamma_e - \gamma}{\gamma_e - \gamma_i}, \quad \text{d'où} \quad -\frac{dV}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma_e - \gamma_i}.$$

Alors l'expression du flux, traversant l'élément ω_2 du § 148, devient

$$\frac{cq}{\gamma_e - \gamma_i}[A_1^2(\beta) - A^2(\alpha)]\,d\alpha\,d\beta;$$

et pour obtenir le flux total qui s'écoule dans l'unité de temps par la surface entière de l'ellipsoïde au paramètre γ, il faut intégrer ce flux partiel de o à ϖ pour α, de o à ϖ' pour β, puis prendre huit fois le résultat. Or, d'après la formule établie au § 104, ce flux total sera

$$4\pi\frac{cq}{\gamma_e - \gamma_i};$$

expression indépendante de γ, comme cela devait être.

Dans la même enveloppe solide, considérons encore l'ellipsoïde isotherme au paramètre γ. Le flux qui traverse un élément

$$\omega_2 = c^2 D_2^2 DD_1\,d\alpha\,d\beta$$

est égal à

$$\frac{cq}{\gamma_e - \gamma_i} D_2^2\,d\alpha\,d\beta;$$

ici l'élément de surface ω_2 varie de grandeur avec α et β. Substituons à cet élément variable un élément constant Ω, ou, posant

$$c^2 D_2^2 DD_1\,d\alpha\,d\beta = \Omega,$$

imaginons que les différentielles $d\alpha$, $d\beta$ varient de telle sorte que le premier membre conserve la même valeur pour toutes les grandeurs des D_i. Cette équation posée donne

$$c D_2^2\, d\alpha\, d\beta = \frac{\Omega}{c\, D D_1},$$

et le flux de chaleur qui traverse Ω a pour expression

$$\frac{q}{c(\gamma_e - \gamma_i)}\,\frac{\Omega}{DD_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{q\,\Omega}{c(\gamma_e - \gamma_i)\sqrt{A_2^2 - A_1^2}\sqrt{A_2^2 - A^2}}.$$

A l'extrémité du grand axe de l'ellipsoïde dont les coordonnées sont $\alpha = \varpi$, $\beta = \varpi'$, d'où $A = k$, $A_1 = 1$, le flux sera

$$\frac{q\,\Omega}{c(\gamma_e - \gamma_i)\,A_2 B_2 C_2}\,A_2;$$

à l'extrémité de l'axe moyen dont les coordonnées sont $\alpha = 0$, $\beta = \varpi'$, d'où $A = 0$, $A_1 = 1$, le flux est

$$\frac{q\,\Omega}{c(\gamma_e - \gamma_i)\,A_2 B_2 C_2}\,B_2;$$

enfin, à l'extrémité du petit axe dont les coordonnées sont $\alpha = 0$, $\beta = 0$, d'où $A = 0$, $A_1 = k$, le flux devient

$$\frac{q\,\Omega}{c(\gamma_e - \gamma_i)\,A_2 B_2 C_2}\,C_2.$$

Les trois flux sont entre eux comme les fonctions inverses A_2, B_2, C_2, ou comme les axes de l'ellipsoïde isotherme.

Cette loi est la même que celle qui régit la tension de l'électricité statique à la surface d'un ellipsoïde conducteur. Concordance que l'on pouvait prévoir, d'après l'identité qui existe entre les surfaces isothermes et les surfaces de niveau : car si la température et le potentiel sont représentés par la même fonction V de γ, le flux calorifique et la tension électrique s'expriment par la dérivée de cette fonction, et sont conséquemment proportionnels.

On arrive plus rapidement à la loi énoncée, en remarquant que l'épaisseur de la couche comprise entre deux ellipsoïdes aux paramètres γ et $\gamma + d\gamma$, étant égale à ds_1, varie comme le produit DD_1 ; et que, d'après la loi physique (1), l'intensité du flux de chaleur doit être en raison inverse de cette épaisseur, qui, à chaque sommet, est elle-même en raison inverse de l'axe correspondant, d'après les égalités

$$A_2\, dA_2 = B_2\, dB_2 = C_2\, dC_2,$$

déduites des différentielles (6), § 37.

QUATORZIÈME LEÇON.

Double cas du prisme rectangle indéfini. — Développements divers d'une fonction d'une seule variable en série de sinus et de cosinus. — Cas du prisme rectangle défini. — Développement d'une fonction de deux variables en série de cosinus.

---

§ CLII.

QUESTION GÉNÉRALE.

Voici maintenant l'énoncé du problème général indiqué au § 143 : La surface d'un corps solide homogène est soumise à des sources calorifiques, constantes et diverses ; les points de cette surface ayant ainsi des températures fixes et connues, il s'agit de déterminer une fonction V qui exprime les températures des points situés à l'intérieur du corps.

Indiquons succinctement les solutions de ce problème pour plusieurs formes de corps traitées depuis longtemps par les géomètres.

§ CLIII.

PRISME RECTANGLE. PREMIER CAS.

Exemple I. — Le corps solide est une poutre rectangulaire, indéfinie dans le sens de ses arêtes ; trois des faces latérales ont la température zéro sur toute leur étendue ; la quatrième a une température fixe sur chaque droite parallèle à l'axe de la poutre, et différente suivant la position de cette droite.

Prenant l'axe de la poutre pour celui des z, et les axes des x et des y respectivement parallèles aux côtés $2a$ et $2b$ de la section normale, les faces latérales auront pour équations

$$x=-a,\quad x=+a,\quad y=-b,\quad y=+b;$$

la température des trois premières est zéro; celle de la quatrième est variable avec x seulement et donnée par la fonction $F(x)$. Il est évident que la fonction cherchée V ne doit pas contenir la coordonnée z, ce qui réduit l'équation (3), § 146, à celle-ci

$$(1)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0.$$

Le problème d'analyse qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer une fonction V de x et y: 1° qui vérifie l'équation aux différences partielles (1); 2° qui s'annule, quel que soit y, quand x est égal à $-a$ ou $+a$; 3° qui s'annule, quel que soit x, quand y est égal à $-b$; 4° enfin qui se réduise à $F(x)$ quand y est égal à $+b$. Voici la marche de la solution: on compose V d'une série de *termes simples* satisfaisant chacun aux trois premières conditions; on donne à chaque terme un coefficient arbitraire; puis on cherche quelle valeur doivent avoir les coefficients introduits, pour que la série V satisfasse à la quatrième et dernière condition.

§ CLIV.

DÉTERMINATION DU TERME SIMPLE.

Soit U un des termes simples. Pour qu'il puisse remplir les conditions relatives aux trois premières faces, il doit être essentiellement de la forme $U=XY$; le facteur X ne contenant que x, et s'annulant pour $x=\pm a$; Y ne contenant que y, et se réduisant à zéro pour $y=-b$. Ce terme doit vérifier l'équation (1); substituant à V le produit XY, et divisant ensuite par ce produit même, on doit avoir

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0.$$

La première partie étant indépendante de y, la seconde de x, cette équation ne peut être vérifiée que si ces deux parties ont des valeurs constantes, égales et de signes contraires. Soient $-m^2$ et $+m^2$ ces deux valeurs, les deux facteurs de U devront satisfaire aux équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dx^2}+m^2X=0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2}-m^2Y=0.$$

L'intégrale générale de la première équation (2) est

$$X=C\sin mx+C'\cos mx,$$

et puisque X doit s'annuler pour $x=\pm a$, il faudra que l'on ait, ou

$$C'=0, \quad C=1, \quad \text{et} \quad m=\frac{i\pi}{a},$$

i étant un nombre entier quelconque, ou

$$C=0, \quad C'=1, \quad m=\frac{2j+1.\pi}{2a},$$

j étant pareillement un nombre entier. Ainsi le facteur

$$X \text{ sera, ou } \sin\frac{i\pi}{a}x, \quad \text{ou} \quad \cos\frac{2j+1.\pi}{2a}x.$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle (2) en y, dans laquelle la constante m a maintenant l'une ou l'autre des deux valeurs précédentes, sera

$$Y=C''e^{my}+C'''e^{-my},$$

et si l'on détermine les deux constantes C'' et C''', de telle sorte que Y s'annule pour $y=-b$, condition essentielle, et devienne l'unité pour $y = +b$, ce qui simplifie la recherche ultérieure, on aura définitivement

$$Y = \frac{e^{m(y+b)} - e^{-m(y+b)}}{e^{2mb} - e^{-2mb}}, \quad \text{ou} \quad Y = \frac{\mathcal{E}[m(y+b)]}{\mathcal{E}(2mb)}.$$

§ CLV.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

Ainsi la fonction V se composera de deux séries partielles et sera de la forme

$$(3) \quad V = \left\{ \begin{array}{l} \sum M \dfrac{\mathcal{E}\left[\dfrac{i\pi}{a}(y+b)\right]}{\mathcal{E}\left(2i\pi\dfrac{b}{a}\right)} \sin i\pi\dfrac{x}{a} \\ + \sum N \dfrac{\mathcal{E}\left[\dfrac{2j+1.\pi}{2a}(y+b)\right]}{\mathcal{E}\left(2j+1.\pi\dfrac{b}{a}\right)} \cos \dfrac{2j+1.\pi}{2}\dfrac{x}{a}; \end{array} \right.$$

la première série s'étendant de $i = 1$ à $i = \infty$, la seconde de $j = 0$ à $j = \infty$; M et N étant des coefficients arbitraires et différant d'un terme à un autre.

Il faut, pour dernière condition, que cette valeur générale (3) de V se réduise à $F(x)$ quand on y fera $y = b$, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$(4) \qquad \sum M \sin i\pi\frac{x}{a} + \sum N \cos\frac{2j+1.\pi}{2}\frac{x}{a} = F(x),$$

ou, plus simplement,

$$(5) \qquad \sum \mathfrak{M} X = F(x),$$

X étant $\sin i\pi\dfrac{x}{a}$, ou $\cos\dfrac{2j+1.\pi}{2}\dfrac{x}{a}$; $\mathfrak{M}$ étant M ou N. Dans cette équation (5), qu'il s'agit d'identifier, le facteur variable X de chaque terme vérifie l'équation

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + m^2 X = 0 \tag{6}$$

$\left(m \text{ étant } \frac{i\pi}{a}, \text{ ou } \frac{2j+1.\pi}{2a}\right)$, et s'annule aux deux limites $x = -a$ et $x = +a$.

Soit X' le facteur variable d'un autre terme; il vérifiera l'équation différentielle

$$\frac{d^2 X'}{dx^2} + m'^2 X' = 0, \tag{7}$$

dans laquelle m' est $\frac{i'\pi}{a}$, ou $\frac{2j'+1.\pi}{2a}$: m' différant de m. Les deux équations (6) et (7) donnent, par une combinaison facile,

$$(m'^2 - m^2) XX' = X' \frac{d^2 X}{dx^2} - X \frac{d^2 X'}{dx^2}. \tag{8}$$

Si l'on multiplie par dx et qu'on intègre de $x = -a$ à $x = +a$, l'intégrale indéfinie du second membre étant $\left(X' \frac{dX}{dx} - X \frac{dX'}{dx}\right)$, et s'annulant aux deux limites par X et X', on aura

$$(m'^2 - m^2) \int_{-a}^{+a} XX' \, dx = 0,$$

et, puisque m' est différent de m,

$$\int_{-a}^{+a} XX' \, dx = 0. \tag{9}$$

Ce théorème important (9) donne le moyen d'isoler chaque coefficient de l'identité (4) et de déterminer sa valeur.

§ CLVI.

VALEURS DES COEFFICIENTS.

On isolera le coefficient M_i du terme de la première série partielle où m est $\frac{i\pi}{a}$, en multipliant l'équation (4) par $\sin i\pi \frac{x}{a} dx$, et intégrant entre les deux limites $-a$ et $+a$, ce qui fera disparaître tous les autres termes du premier membre d'après le théorème (9), et l'on aura définitivement

$$(10) \qquad M_i \int_{-a}^{+a} \sin^2 i\pi \frac{x}{a} dx = \int_{-a}^{+a} F(x) \sin i\pi \frac{x}{a} dx.$$

On isolera le coefficient N_j du terme de la seconde série partielle où m est $\frac{2j+1.\pi}{2a}$, en multipliant l'équation (4) par $\cos \frac{2j+1.\pi}{2a} x.dx$, et intégrant entre $-a$ et $+a$, ce qui fera disparaître tous les autres termes du premier membre, et il viendra

$$(11) \quad N_j \int_{-a}^{+a} \cos^2 \frac{2j+1\ \pi}{2a} x.dx = \int_{-a} F(x) \cos \frac{2j+1.\pi}{2a} x.dx.$$

L'intégrale définie

$$\int_{-a}^{+a} \cos g\pi \frac{x}{a} dx, \quad \text{ou} \quad \int_{-a}^{+a} \left(\cos^2 \frac{g\pi}{2a} x - \sin^2 \frac{g\pi}{2a} x\right) dx,$$

dans laquelle g est un nombre entier, pair ou impair, est égale à zéro, puisque l'intégrale indéfinie, qui est $\frac{a}{g\pi} \sin g\pi \frac{x}{a}$, s'évanouit aux deux limites. Les deux intégrales définies

$$\int_{-a}^{+a} \cos^2 \frac{g\pi}{2a} x . dx, \qquad \int_{-a}^{+a} \sin^2 \frac{g\pi}{2a} x . dx,$$

sont donc égales entre elles, et puisque leur somme est $\int_{-a}^{+a} dx$, ou $2a$, chacune d'elles est égale à a.

D'après cela, les valeurs générales des coefficients M et N, données par les équations (10) et (11), sont

$$(12) \qquad \begin{aligned} M_i &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} F(x) \sin \frac{i\pi}{a} x . dx, \\ N_j &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} F(x) \cos \frac{2j+1.\pi}{2a} x . dx. \end{aligned}$$

Ces valeurs étant substituées dans les deux séries partielles, la série totale (3) sera définitivement la fonction V cherchée.

§ CLVII.

PARTIES PAIRE ET IMPAIRE.

On peut considérer la fonction donnée $F(x)$ comme étant composée de deux parties, l'une paire,

$$P(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2},$$

l'autre impaire,

$$I(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2}.$$

Substituant $P(x) + I(x)$ à $F(x)$ sous les intégrales (12), et observant que les intégrales définies

$$\int_{-a}^{+a} P(x) \sin \frac{i\pi}{a} x . dx, \qquad \int_{-a}^{+a} I(x) \cos \frac{2j+1.\pi}{2a} x . dx,$$

sont nulles d'elles-mêmes, puisque leurs éléments sont des fonctions impaires, on aura séparément

$$(13)\qquad \begin{aligned} M_i &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} I(x)\sin\frac{i\pi}{a}x.dx,\\ N_j &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} P(x)\cos\frac{2j+1.\pi}{2a}x.dx. \end{aligned}$$

Par ces valeurs, la première série partielle de V (3) correspond au développement de la partie impaire I (x), la seconde à celui de la partie paire P (x) de F (x). La première série partielle disparaîtrait si les températures fixes F (x) étaient symétriquement égales et de même signe, de part et d'autre de l'axe des y. Ce serait la seconde série partielle qui s'annulerait, si les températures fixes étaient symétriquement égales et de signes contraires, par rapport au même axe.

Si l'on voulait évaluer les flux de chaleur qui se perdent dans la source constante, de température zéro, par les éléments de la face $x = -a$, ou $x = +a$, il faudrait prendre la dérivée $\frac{dV}{dx}$, qui entre comme facteur dans l'expression de ces flux, et y faire $x = -a$, ou $= +a$, ce qui donnerait

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\pm a} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{a^2}\sum i M_i \cos i\pi \frac{\mathcal{E}\left(\frac{i\pi}{a}(y+b)\right)}{\mathcal{E}\left(2i\pi\frac{a}{b}\right)}\\ &\mp\frac{\pi}{2a^2}\sum (2j+1) N_j \sin\frac{2j+1.\pi}{2}\frac{\mathcal{E}\left(\frac{2j+1.\pi}{2a}(y+b)\right)}{\mathcal{E}\left(2j+1.\pi\frac{b}{a}\right)}. \end{aligned}\right.$$

D'où l'on voit que les deux parties, impaire et paire, de F (x), influeront l'une et l'autre sur l'intensité du flux.

§ CLVIII.

PREMIERS DÉVELOPPEMENTS.

De la solution qui précède résulte ce corollaire, qu'une fonction impaire $\mathrm{I}(x)$ peut être développée en série par la formule

$$(14)\qquad \mathrm{I}(x)=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty}\sin\frac{i\pi}{a}x\int_{-a}^{+a}\mathrm{I}(\alpha)\sin\frac{i\pi}{a}\alpha.d\alpha,$$

et une fonction paire $\mathrm{P}(x)$ par celle-ci,

$$(15)\quad \mathrm{P}(x)=\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{j=\infty}\cos\frac{2j+1.\pi}{2a}x\int_{-a}^{+a}\mathrm{P}(\alpha)\cos\frac{2j+1.\pi}{2a}\alpha.d\alpha.$$

Ces deux développements, trouvés dans la même question de physique mathématique, sont en quelque sorte conjugués : tous deux s'annulent aux limites $x=-a$ et $x=+a$; ni l'une ni l'autre de leurs dérivées premières ne disparaît à ces mêmes limites. Et c'est précisément cette concordance qui les associe dans le développement général,

$$(16)\ \mathrm{F}(x)=\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{j=\infty}\cos\frac{2j+1.\pi}{2a}x\int_{-a}^{+a}\mathrm{F}(\alpha)\cos\frac{2j+1.\pi}{2a}\alpha.d\alpha,\\&+\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty}\sin\frac{i\pi}{a}x\int_{-a}^{+a}\mathrm{F}(\alpha)\sin\frac{i\pi}{a}\alpha.d\alpha,\end{aligned}\right.$$

qui peut seul constater que la série totale V (3) remplit la dernière condition, sans altérer les premières.

§ CLIX.

PRISME RECTANGLE. SECOND CAS.

Exemple II. — Une poutre rectangulaire, de même nature et de mêmes dimensions que celle de l'exemple précédent, a aussi ses deux faces, $y = -b$ et $y = +b$, entretenues, la première à la température constante zéro, la seconde à des températures diverses $F(x)$; mais ses deux autres faces, $x = -a$ et $x = +a$, sont tellement disposées, que les flux de chaleur sont nuls sur tous leurs éléments. (C'est ce qui aura lieu, par exemple, si cette poutre fait partie d'un plancher indéfini, formé de poutres égales et juxtaposées, qui soient, en outre, soumises aux mêmes sources de chaleur par leurs faces libres.)

Il s'agit de déterminer une fonction V de (x, y) : 1° qui vérifie l'équation (1); 2° dont la dérivée $\frac{dV}{dx}$ s'annule, quel que soit y, pour $x = \pm a$; 3° qui s'annule elle-même, quel que soit x, pour $y = -b$; 4° enfin qui se réduise à $F(x)$ pour $y = +b$. Suivant strictement la même marche que dans l'exemple précédent, le facteur Y, du terme simple $U = XY$, restera le même; mais X, devant maintenant être tel que sa dérivée première soit zéro pour $x = \pm a$, sera nécessairement $\cos i\pi \frac{x}{a}$, ou $\sin \frac{2j+1.\pi}{2} \frac{x}{a}$. La fonction V, toujours composée de deux séries partielles, sera de la forme

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} V &= \sum M \frac{\mathcal{E}\left[\frac{i\pi}{a}(y+b)\right]}{\mathcal{E}\left(2i\pi\frac{b}{a}\right)} \cos i\pi\frac{x}{a} \\ &+ \sum N \frac{\mathcal{E}\left[\frac{2j+1.\pi}{2a}(y+b)\right]}{\mathcal{E}\left(2j+1.\pi\frac{b}{a}\right)} \sin\frac{2j+1.\pi}{2}\frac{x}{a}. \end{aligned} \right.$$

La quatrième condition à remplir exigera que l'on ait

$$(18) \qquad \sum M \cos i\pi \frac{x}{a} + \sum N \sin \frac{2j+1.\pi}{2} \frac{x}{a} = F(x),$$

ou plus simplement

$$(19) \qquad \sum \mathfrak{M} X = F(x).$$

X et X' facteurs variables de deux termes, correspondants à des valeurs différentes m et m', vérifieront encore les deux équations (6) et (7); la même combinaison donnera encore l'équation (8), que l'on multipliera par dx pour l'intégrer entre $-a$ et $+a$; alors l'intégrale indéfinie du second membre, qui sera toujours

$$\left(X' \frac{dX}{dx} - X \frac{dX'}{dx}\right),$$

s'évanouira encore aux deux limites, mais ici ce sera par $\frac{dX}{dx}$ et $\frac{dX'}{dx}$. On aura donc encore le théorème (9).

Poursuivant, on conclura que les valeurs générales des coefficients M et N sont

$$(20) \qquad \begin{cases} M_i = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-a}^{+a} F(x) \cos \frac{i\pi}{a} x.dx, \\ N_j = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-a}^{+a} F(x) \sin \frac{2j+1.\pi}{2a} x.dx, \end{cases}$$

avec cette seule différence que la première série partielle (17) comprend actuellement un terme correspondant à $i = 0$, qui est

$$M_0 \frac{y+b}{2b},$$

et dont le coefficient a la valeur

$$(21) \qquad M_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} F(x)\, dx,$$

que l'on obtient en multipliant l'équation (18) par dx et intégrant entre $-a$ et $+a$, ce qui fait disparaître évidemment tous les autres termes du premier membre.

Les valeurs (21) et (20) étant portées dans les deux séries partielles, la série totale (17) sera définitivement la nouvelle fonction V cherchée. En substituant à $F(x)$, sous les intégrales (21) et (20), la somme $P(x)+I(x)$ de ses deux parties paire et impaire, on a séparément

$$(22)\quad \begin{cases} M_0 = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} P(x)\,dx, \quad M_i = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} P(x)\cos\dfrac{i\pi}{a}x\,dx, \\ N_j = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} I(x)\sin\dfrac{2j+1.\pi}{2a}x.dx. \end{cases}$$

Par ces valeurs, la première série partielle de V (17) emploie le développement de la partie paire de $F(x)$, la seconde celui de la partie impaire.

§ CLX.

SECONDS DÉVELOPPEMENTS.

De cette nouvelle solution résulte cet autre corollaire, qu'une fonction paire $P(x)$ peut être développée par la formule

$$(23)\quad \begin{cases} P(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} P(\alpha)\,d\alpha \\ \quad + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty}\cos\dfrac{i\pi}{a}x\int_{-a}^{+a} F(\alpha)\cos\dfrac{i\pi}{a}\alpha.d\alpha, \end{cases}$$

et une fonction impaire $I(x)$ par celle-ci

$$(24)\quad I(x) = \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{j=\infty}\sin\frac{2j+1.\pi}{2a}x\int_{-a}^{+a} I(\alpha)\sin\frac{2j+1.\pi}{2a}\alpha.d\alpha.$$

Ces deux développements sont conjugués : ni l'un ni l'autre ne s'évanouit aux limites $x = \pm a$, tandis que leurs dérivées en x s'annulent ensemble aux mêmes limites. Et de cette concordance même résulte leur association dans le développement général... (25)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} F(\alpha)\,d\alpha + \dfrac{1}{a}\sum_{1}^{\infty} \cos\dfrac{i\pi}{a}x \int_{-a}^{+a} F(\alpha)\cos\dfrac{i\pi}{a}\alpha\,d\alpha \\ + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \sin\dfrac{2j+1.\pi}{2a}x \int_{-a}^{+a} F(\alpha)\sin\dfrac{2j+1.\pi}{2a}\alpha.d\alpha, \end{cases}$$

qui seul permet à la fonction V (17) de vérifier la dernière condition, en même temps que les premières.

Une fonction quelconque $F(x)$ est aussi exprimée par une série de sinus et de cosinus, en prenant le développement de la partie paire dans le groupe (14), (15), et celui de la partie impaire dans le groupe (23), (24), ou inversement; ce qui donne, par des réductions faciles, les formules suivantes :

$$(26)\quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} F(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\int_{-a}^{+a} F(\alpha)\cos\dfrac{i\pi}{a}(x-\alpha)\,d\alpha, \\ F(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{0}^{\infty}\int_{-a}^{+a} F(\alpha)\cos\dfrac{2i+1.\pi}{2a}(x-\alpha)\,d\alpha. \end{cases}$$

Mais ces développements hybrides et composés, qui ont pu être l'occasion de recherches intéressantes au point de vue purement analytique, ne sauraient être d'aucune utilité en physique mathématique : car, dans chacun d'eux, la partie paire répond à une question, la partie impaire à une autre toute différente, et en quelque sorte opposée à la première. Sur ce terrain des mathématiques appliquées, il faut s'en tenir aux développements (16) et (25), moins simples en apparence, mais dont l'homogénéité appartient au fond, non à la forme.

§ CLXI.

PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE.

Exemple III. — Le corps solide est un prisme rectangle dont les côtés sont $2a$, $2b$, $2c$. Cinq de ses faces ont la température zéro dans toute leur étendue; la sixième a des températures fixes en ses divers points, lesquelles sont distribuées symétriquement par rapport aux faces latérales.

L'origine des coordonnées étant placée au centre du prisme, et les axes étant parallèles à ses côtés, les six faces auront pour équations :

$$x = -a, \quad y = -b, \quad z = -c,$$
$$x = +a, \quad y = +b, \quad z = +c.$$

La température est zéro sur les cinq premières; sur la sixième elle est variable avec x et y, et donnée par une fonction $F(x, y)$ paire en x et paire en y.

Il s'agit de trouver une fonction V de (x, y, z) : 1° qui vérifie l'équation

$$(27) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

2° qui s'annule séparément pour $x = -a$, $x = +a$, $y = -b$, $y = +b$, $z = -c$; 3° enfin qui se réduise à $F(x, y)$ quand $z = +c$, et puisque cette fonction est paire en x et en y, la fonction V doit être de même nature. Comme dans les exemples précédents, on compose V d'une série de termes simples, satisfaisant chacun à toutes les conditions qui précèdent la dernière.

Soit U un des termes simples. Pour qu'il puisse s'annuler séparément sur les cinq premières faces, il doit être de la forme $U = XYZ$; le facteur X ne contenant que x et s'annulant pour $x = \pm a$, Y ne contenant que y et s'annulant pour $y = \pm b$, enfin Z ne contenant que z et s'annulant quand $z = -c$. Ce terme doit vérifier l'équation (27), ce qui exige que l'on ait

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0.$$

Le premier terme ne pouvant contenir d'autre variable que x, le second que y, le troisième que z, ces termes doivent être égaux à trois constantes : $-m^2$, $-n^2$, $+r^2$; la troisième r^2 étant égale à $(m^2 + n^2)$. Ainsi les trois facteurs de U devront vérifier les trois équations différentielles

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{d^2X}{dx^2} + m^2X = 0, \qquad \dfrac{d^2Y}{dy^2} + n^2Y = 0, \\ \dfrac{d^2Z}{dz^2} - r^2x = 0. \end{array}\right.$$

Le terme simple U, comme V, doit être pair en x et en y; X et Y ne peuvent donc être que $\cos mx$ et $\cos ny$. En outre, pour qu'ils s'annulent quand $x = \pm a$ et $y = \pm b$, les constantes m et n doivent avoir les valeurs

$$(29)\qquad m = \frac{2i + 1 \,.\, \pi}{2a}, \quad n = \frac{2j + 1 \,.\, \pi}{2b},$$

i et j étant des nombres entiers quelconques. Le facteur Z doit vérifier la troisième (28), s'annuler pour $z = -c$, et se réduire à l'unité quand $z = +c$, afin de simplifier la recherche ultérieure; ce facteur sera donc

$$(30)\quad Z = \frac{\mathcal{E}[r(z+c)]}{\mathcal{E}(2rc)}, \quad \text{où } r = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{2i+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2j+1}{b}\right)^2}.$$

Réunissant tous les termes simples correspondants à toutes les valeurs des entiers i et j, la fonction V se présente sous la forme

$$(31)\qquad V = \sum\sum G_{(i,j)} \frac{\mathcal{E}[r(z+c)]}{\mathcal{E}(2rc)} \cos mx \cos ny,$$

où m, n, r ont les valeurs (29) et (30); le double indice de la constante arbitraire G indiquant les valeurs des entiers i et j qui particularisent le terme qu'elle multiplie. Cette fonction V devant se réduire à $F(x, y)$ pour $z = +c$, on doit avoir

$$(32)\qquad \sum\sum G_{(i,j)} \cos mx \cos ny = F(x, y),$$

et il s'agit de déterminer les coefficients $G_{(i,j)}$.

Le théorème (9) établit que les deux intégrales définies

$$\int_{-a}^{+a} \cos mx \cos m'x\,dx, \qquad \int_{-b}^{+b} \cos ny \cos n'y\,dy,$$

sont nulles quand m et m', n et n' sont différents; elles sont d'ailleurs égales à a, à b, quand $m' = m$, $n' = n$. A l'aide de ces propriétés on isolera le coefficient $G_{(i,j)}$, en multipliant l'équation (32) par $\cos mx \cos ny\, dx\, dy$, et intégrant de $x = -a$ à $x = +a$, de $y = -b$ à $y = +b$, double intégration qui fera disparaître tous les autres termes du premier membre, et l'on aura, en remplaçant x et y par

α et β sous l'intégrale définie double,

$$(33) \quad G_{(i,j)} = \frac{1}{ab} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} F(\alpha, \beta) \cos m\alpha \cos n\beta \, d\alpha \, d\beta.$$

Avec cette valeur, la double série (31) sera la fonction V cherchée.

Par cette même valeur (33), la formule (32) développe, en séries de cosinus, une fonction de (x, y), paire en x, paire en y, et d'ailleurs quelconque; genre de développement qui seul permet de constater que la fonction V (31) satisfait à toutes les conditions qui lui sont imposées.

Si la fonction F, qui donne les températures fixes de la face $z = + c$, est impaire par rapport à l'une des variables, en x ou en y, il faut remplacer, dans chaque terme simple, $\cos mx$ ou $\cos ny$, par $\sin mx$ ou $\sin ny$, et prendre

$$m = \frac{i\pi}{a} \quad \text{ou} \quad n = \frac{j\pi}{b}$$

au lieu de la valeur (29). A l'aide de ces changements, on obtiendra immédiatement la série (31) exprimant la température V, si la fonction F est impaire en x et paire en y, ou paire en x et impaire en y, ou enfin impaire en x et en y. Ces trois cas, joints à celui que traite directement l'exemple actuel, donneront quatre séries particulières et distinctes.

Si la fonction F est quelconque, ou composée de quatre parties rentrant respectivement dans les cas précédents, la série générale V sera la somme des quatre séries particulières; et l'on pourra substituer la fonction entière aux fonctions partielles, sous les intégrales définies doubles des coefficients généraux (33), par les mêmes raisons qui établissent l'identité des valeurs (13) et (12).

Enfin, si tous les points de la surface du parallélipipède ont des températures différentes, il faudra répéter la même suite d'opérations pour chacune des six faces, en donnant à cette face les températures qui lui appartiennent, et supposant les cinq autres à zéro. On aura de cette manière six séries générales, dont la somme exprimera définitivement la température V d'un point quelconque pris à l'intérieur du prisme rectangle.

Cette multiplicité des séries composant la valeur définitive de V, capable d'embrasser tous les cas, tient à la discontinuité de la surface qui limite le solide. Elle appartient à tous les corps de forme polyédrique, mais elle n'existe plus pour les sphéroïdes que nous traiterons dans les leçons suivantes. Ce qui prouve que le prisme rectangle, généralement choisi comme l'exemple le plus simple, dans les questions de physique mathématique, est au contraire fort compliqué; et qu'il y aurait de l'avantage à essayer d'abord des corps d'une autre forme : c'est-à-dire à prendre un système de coordonnées autre que celui des (x, y, z).

QUINZIÈME LEÇON.

Cas de la sphère. — Conditions restrictives imposées par la forme du corps à l'expression de la température. — Forme essentielle et propriétés diverses de la fonction $P(\mu)$ du sinus de la latitude. — Développement d'une fonction en coordonnées sphériques.

§ CLXII.

CAS DE LA SPHÈRE.

Exemple IV. — Le corps solide est une sphère pleine dont le rayon est r; tous les points de sa surface ont des températures fixes, données par la fonction $F(\psi, \mu)$, ψ étant la longitude et μ le sinus de la latitude. Il s'agit de déterminer la fonction V des trois coordonnées sphériques (ψ, μ, ρ) qui exprime la température des points situés à l'intérieur de la sphère. Cette fonction doit : 1° vérifier l'équation aux différences partielles

$$\frac{\dfrac{d^2V}{d\mu^2}}{1-\mu^2} + \frac{d(1-\mu^2)\dfrac{dV}{d\mu}}{d\mu} + \frac{d\rho^2\dfrac{dV}{d\rho}}{d\rho} = 0, \tag{1}$$

§ 147; 2° se réduire à $F(\psi, \mu)$ quand $\rho = r$. On peut la composer, comme dans les exemples précédents, d'une somme de termes simples, vérifiant chacun l'équation (1), et tous multipliés par des coefficients, d'abord arbitraires, qu'il faudra ensuite déterminer, de telle sorte que la seconde et dernière condition soit satisfaite.

Soit U un des termes simples. Il est naturel d'essayer s'il peut avoir la forme $U = QPR$ d'un produit de trois facteurs, Q variable seulement avec ψ, P avec μ, R avec ρ.

Substituant dans l'équation (1) le produit QPR à V, et divisant ensuite par ce produit même, on aura

$$(2)\quad \frac{1}{1-\mu^2}\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\psi^2}+\frac{1}{P}\frac{d(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}}{d\mu}+\frac{1}{R}\frac{d\rho^2\frac{dR}{d\rho}}{d\rho}=0.$$

Le second terme ne contenant que μ, il doit en être de même du reste de l'équation; ce qui exige que les deux fractions

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\psi^2},\quad \frac{1}{R}\frac{d\rho^2\frac{dR}{d\rho}}{d\rho},$$

aient pour valeurs des constantes; car la première ne pourrait introduire que la variable ψ, la seconde que ρ. La question traitée, qui concerne exclusivement une sphère pleine, sans lacune à la surface, indique quelles peuvent être ces constantes.

§ CLXIII.

CONDITIONS RESTRICTIVES.

La fonction V doit évidemment rester la même si l'on augmente la variable ψ, ou la longitude, de $2g\pi$ ou d'un nombre entier de circonférences. Donc V ne peut contenir la variable ψ que sous des lignes trigonométriques. Pour toutes les valeurs de ψ, V doit rester fini; donc ces lignes trigonométriques sont exclusivement des sinus et des cosinus, et de plus, V étant développé suivant les puissances entières de $\sin\psi$ ou de $\cos\psi$, les exposants de toutes ces puissances seront essentiellement positifs; or ce développement pourra toujours être transformé en un autre, suivant les sinus et cosinus des multiples de ψ. Par suite de l'indépendance mutuelle des coefficients arbitraires, chaque terme simple U doit jouir des mêmes propriétés restrictives que V; donc le facteur Q peut n'être que le sinus ou le cosinus d'un arc $l\psi$, l étant essentiellement un nombre entier. Dans les deux cas, la fraction $\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\psi^2}$ se réduira à $-l^2$, c'est-à-dire que Q vérifiera l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{d^2Q}{d\psi^2} + l^2Q = 0.$$

Au centre du système, où $\rho = 0$, et qui est un point du solide, la température doit être finie. Donc si V est développé suivant les puissances entières de ρ, les exposants de toutes ces puissances seront essentiellement positifs. D'après cela, le facteur R peut n'être que la puissance $n^{ième}$ de ρ, n étant entier et positif. Pour simplifier la recherche ultérieure, on peut prendre $R = \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$; par cette valeur la fraction $\frac{1}{R}\frac{d\rho^2\frac{dR}{d\rho}}{d\rho}$ se réduira au produit $n(n+1)$; c'est-à-dire que R vérifiera l'équation aux différences partielles

$$(4) \qquad \frac{d\rho^2\frac{dR}{d\rho}}{d\rho} = n(n+1)R.$$

Par les substitutions respectives de $-l^2$ et $n(n+1)$ aux fractions $\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\psi^2}$ et $\frac{1}{R}\frac{d\rho^2\frac{dR}{d\rho}}{d\rho}$, l'équation (2) devient

$$(5) \qquad \frac{d(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}}{d\mu} + \left[n(n+1) - \frac{l^2}{1-\mu^2}\right]P = 0;$$

et cette équation différentielle doit être vérifiée par le facteur P, fonction de μ seul. La forme essentielle de ce facteur est encore indiquée par la question traitée.

Aux points du solide qui sont situés sur l'axe polaire du système sphérique, la température doit être déterminée et finie; or, pour tout point de l'axe polaire, $\cos\theta$ ou le cosinus de la latitude est nul, la longitude ψ restant quelconque. Donc non-seulement V ne peut contenir ψ que sous les lignes trigonométriques sinus et cosinus, mais en outre $\sin\psi$ et $\cos\psi$ y ont pour facteur inséparable $\cos\theta$ ou $\sqrt{1-\mu^2}$; c'est-à-dire que V contient, outre les variables simples μ et ρ, les variables composées $\sqrt{1-\mu^2}\cos\psi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\sin\psi$; si $\cos\psi$ et $\sin\psi$ y entraient d'une autre manière, ils ne disparaîtraient pas pour $\mu = \pm 1$, et les températures des points du solide situés sur l'axe polaire ne seraient pas déterminées. D'après cette nouvelle propriété restrictive, Q, qui est $\sin l\psi$ ou $\cos l\psi$, c'est-à-dire une fonction entière homogène du degré l de $\sin\psi$ et $\cos\psi$, doit être accompagné du facteur $\cos^l\theta$ ou $(1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}$; et P doit contenir ce facteur.

§ CLXIV.

FORME ESSENTIELLE DE LA FONCTION P(μ).

Ainsi P est nécessairement de la forme

$$P = (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}} M, \tag{6}$$

M étant une fonction de μ qu'il faut chercher. Posant, pour simplifier,

$$\sqrt{1-\mu^2} = m, \qquad \text{d'où} \quad \frac{dm}{d\mu} = -\frac{\mu}{m},$$

on a, par la valeur (6), et une première différentiation,

$$P = m^l M, \qquad m^2 \frac{dP}{d\mu} = m^{l+2}\frac{dM}{d\mu} - l\mu m^l M;$$

puis, à l'aide d'une seconde différentiation, l'expression

$$\frac{dm^2\frac{dP}{d\mu}}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{l^2}{m^2}\right]P,$$

ou le premier membre de l'équation (5), devient

$$m^{l+2}\frac{d^2M}{d\mu^2}-2(l+1)\mu m^l\frac{dM}{d\mu}$$
$$+(l^2\mu^2m^{l-2}-lm^l+n(n+1)m^l-l^2m^{l-2})M;$$

or les deux termes extrêmes de la parenthèse qui multiplient M donnent $-l^2m^l$ en les réunissant, et l'expression totale, qui doit être nulle d'après (5), est divisible par m^l; ce qui donne définitivement, en replaçant $(1-\mu^2)$ au lieu de m^2,

$$(7)\ (1-\mu^2)\frac{d^2M}{d\mu^2}-2(l+1)\mu\frac{dM}{d\mu}+(n-l)(n+l+1)M=0$$

pour l'équation différentielle que doit vérifier M.

La fonction M étant conçue développée suivant les puissances entières de sa variable μ, les exposants de ces puissances doivent être essentiellement positifs : sinon V serait infini pour $\mu=0$, c'est-à-dire pour tous les points du solide situés sur l'équateur du système sphérique; ce qui est inadmissible. Soit i l'exposant le plus élevé; lors de la substitution du développement de M dans l'équation (7) à vérifier, le premier terme μ^i devra avoir, comme tous les autres, un coefficient nul; or on voit facilement que ce coefficient sera

$$[-i(i-1)-2(l+1)i+(n-l)(n+l+1)],$$

ou, par transformation,

$$(n-l-i)(n+l+1+i);$$

il faut donc que i soit égal ou à $-(n+l+1)$, ou à $n-l$.

La première valeur étant négative doit être rejetée; et pour que la seconde soit positive, il faut que n ne soit pas inférieur à l.

§ CLXV.

VALEUR DE LA FONCTION P(μ).

Ainsi les deux entiers, essentiellement positifs, n et l, qui semblaient tout à fait indépendants l'un de l'autre, doivent être tels, que la différence $n-l$ ne soit pas négative. Et c'est cette différence, entière et positive, qui sera l'exposant du premier terme de M. On reconnaît d'ailleurs à l'inspection de l'équation (7) que les réductions ne peuvent s'opérer qu'entre des termes consécutifs du développement substitué qui auront une même parité, c'est-à-dire que le polynôme M ne contiendra que des puissances paires ou impaires, quand la différence $n-l$ sera elle-même un nombre pair ou impair.

D'après cela, M ne peut être que de la forme suivante

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}=\mu^{n-l}+k_1\mu^{n-l-2}+k_2\mu^{n-l-4}+ \\ \ldots+k_{s-1}\mu^{n-l-2s+2}+k_s\mu^{n-l-2s}+\ldots, \end{array}\right.$$

et il s'agit de trouver la loi des coefficients k_s. Or, lorsqu'on effectue la substitution de ce polynôme (8) à la place de M, dans l'équation (7), les termes contenant μ avec l'exposant $(n-l-2s)$ se réunissent avec le coefficient

$$\begin{array}{l} k_s[(n-l)(n+l+1)-2(l+1)(n-l-2s)-(n-l-2s)(n-l-2s-1)] \\ \qquad +k_{s-1}(n-l-2s+2)(n-l-2s+1). \end{array}$$

La parenthèse qui sert de facteur à k_s se réduit d'abord à

$$[(n-l)(n+l+1)-(n-l-2s)(n+l+1-2s)]$$

par la fusion des deux dernières parties, et devient définitivement

$$2s(2n+1-2s);$$

donc, après la substitution, le terme en μ^{n-l-2s} sera

$$+[2s(2n+1-2s)k_s+(n-l-2s+2)(n-l-2s+1)k_{s-1}]\mu^{n-l-2s}$$

et, en l'égalant à zéro, on aura

$$(9) \qquad k_s = -\frac{(n-l-2s+2)(n-l-2s+1)}{2s(2n+1-2s)}k_{s-1}.$$

Cette valeur générale de k_s s'annule, quel que soit k_{s-1}, pour s égal à $\frac{n-l}{2}+1$, ou à $\frac{n-l+1}{2}$; une de ces deux valeurs est entière, ce sera la première si $n-l$ est pair, la seconde si $n-l$ est impair; et puisque l'indice de k_s indique le nombre des termes qui précèdent celui qui multiplie ce coefficient, il en résulte que le polynôme se terminera dans les deux cas, et que le nombre de ses termes sera $\frac{n-l}{2}+1$, ou $\frac{n-l+1}{2}$, suivant que $n-l$ sera pair ou impair; le dernier terme étant constant, ou contenant μ à la première puissance.

Le coefficient du premier terme de M(8), ou k_0, étant l'unité, on aura successivement, d'après l'équation (9),

$$k_0=1, \quad k_1=-\frac{(n-l)(n-l-1)}{2.(2n-1)},$$

$$k_2=+\frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)},\ldots,$$

et substituant ces valeurs dans M (8), puis M dans P (7), on aura enfin

$$(10) \qquad P=(1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}\left[\mu^{n-l}-\frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-l-2}+\ldots\right]$$

pour le facteur P, fonction de μ seul, du terme simple U.

§ CLXVI.

FORMES DE LA DOUBLE SÉRIE V.

Les trois facteurs Q, P, R de U vérifient respectivement les équations différentielles (3), (5), (4). On peut prendre pour Q l'intégrale générale de (3), qui est

$$Q = G \cos l\psi + H \sin l\psi,$$

G et H étant deux constantes arbitraires. Mais P (10) et $R = \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ ne sont que des intégrales particulières de (5) et (4); la nature de la question, et les propriétés restrictives qu'elle impose à la fonction cherchée, éloignant les intégrales générales.

Réunissant les termes simples qui correspondent à toutes les valeurs admissibles des entiers l et n, la fonction V se présente sous la forme

$$V = S\,(G_l^{(n)} \cos l\psi + H_l^{(n)} \sin l\psi)\, P_l^{(n)} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n;$$

les indices donnés à P et aux constantes indiquant les valeurs des entiers l et n qui particularisent chaque terme simple. La double sommation S peut se faire de deux manières. On peut écrire

$$(11) \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left[\sum_{l=0}^{l=n} (G_l^{(n)} \cos l\psi + H_l^{(n)} \sin l\psi)\, P_l^{(n)} \right].$$

Le sigma relatif à n s'étend depuis zéro jusqu'à l'infini. Le sigma relatif à l est subordonné au premier, il s'étend depuis $l = 0$ jusqu'à $l = n$, limite supérieure infranchissable; il ne contient donc que $n + 1$ termes simples et $2n + 1$ constantes arbitraires, $H_0^{(n)}$ n'existant pas. On peut encore écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} V = \sum_{l=0}^{l=\infty} \Bigg[& \cos l\psi \sum_{n=1}^{n=\infty} G_l^{(n)} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_l^{(n)} \\ & + \sin l\psi \sum_{n=0}^{n=\infty} H_l^{(n)} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_l^{(n)} \Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Le sigma relatif à l s'étend depuis zéro jusqu'à l'infini. Les sigmas relatifs à n sont subordonnés au premier, et servent de coefficients généraux à $\cos l\psi$ et $\sin l\psi$; dans chacun d'eux le nombre l est fixe et constant; ils s'étendent depuis $n = l$, limite inférieure infranchissable, jusqu'à $n = \infty$; ils contiennent donc des nombres infinis de termes et de constantes arbitraires.

Dans la question qui nous occupe, c'est la seconde forme (12) qu'il faut prendre. La fonction V devant se réduire à $F(\psi, \mu)$ quand $\rho = r$, on doit avoir

$$(13)\quad \sum \left(\cos l\psi \sum G_l^{(n)} P_l^{(n)} + \sin l\psi \sum H_l^{(n)} P_l^{(n)}\right) = F(\psi, \mu);$$

et il s'agit de déterminer les coefficients $G_l^{(n)}$, $H_l^{(n)}$, pour qu'il en soit ainsi.

§ CLXVII.

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS.

Les applications que nous avons faites du théorème établi au § 155, dans les deux premiers exemples, en y changeant i en l, a en π, montrent que les deux intégrales définies

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos l\psi \cos l'\psi\, d\psi, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin l\psi \sin l'\psi\, d\psi,$$

sont nulles quand les entiers l et l' sont différents, et égales à π quand $l' = l$. On a d'ailleurs identiquement

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos l\psi \sin l'\psi \, d\psi = 0,$$

que l et l' soient différents ou égaux, car l'élément de cette intégrale est une fonction impaire. A l'aide de ces propriétés, on isolera le sigma partiel, facteur de $\cos l\psi$, ou de $\sin l\psi$, dans chaque terme du sigma principal, en multipliant l'équation (13) par $\cos l\psi d\psi$, ou par $\sin l\psi d\psi$, et intégrant entre $-\pi$ et $+\pi$; ce qui fera disparaître tous les autres termes du premier membre, et l'on aura

$$(14) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} G_l^{(n)} P_l^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi, \mu) \cos l\psi \, d\psi, \\ \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} H_l^{(n)} P_l^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi, \mu) \sin l\psi \, d\psi. \end{cases}$$

Quant au terme qui correspond à $l = 0$, on l'isole en multipliant l'équation (13) par $d\psi$, et intégrant de $-\pi$ à $+\pi$, remarquant que toutes les intégrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos l\psi \, d\psi, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin l\psi \, d\psi$$

sont nulles d'elles-mêmes, et que $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} d\psi = 2\pi$; d'où résulte

$$(15) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} G_0^{(n)} P_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi, \mu) \, d\psi.$$

Cette dernière formule sera comprise dans les précédentes, si, posant

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 l\psi\, d\psi = \omega_l, \tag{16}$$

on substitue, au dénominateur π des seconds membres (14), ω_l, intégrale définie qui est 2π ou π, suivant que l est ou n'est pas zéro; simplification que nous adoptons.

Dans tous les termes des sigmas simples (14), l'entier l a une même valeur fixe; les indices supérieurs de la fonction P et des constantes sont seuls changeants, depuis $n = l$ jusqu'à $n = \infty$; les seconds membres ne contiennent plus d'autre variable que μ ainsi que les premiers. Outre la fonction P correspondante au groupe (l, n), et qui vérifie l'équation différentielle (5), introduisons une fonction semblable P' qui corresponde au groupe (l, n'), n' différant de n, et qui vérifiera l'équation différentielle

$$\frac{d(1-\mu^2)\dfrac{dP'}{d\mu}}{d\mu} + \left[n'(n'+1) - \frac{l^2}{1-\mu^2}\right] P' = 0. \tag{17}$$

L'élimination de l^2 entre les équations (17) et (5) donnera

$$[n'(n'+1) - n(n+1)]\, PP' = \frac{d(1-\mu^2)\left(P'\dfrac{dP}{d\mu} - P\dfrac{dP'}{d\mu}\right)}{d\mu};$$

si l'on multiplie par $d\mu$ et qu'on intègre entre $\mu = -1$ et $\mu = +1$, le second membre disparaîtra; car l'intégrale indéfinie de ce second membre, qui est

$$(1-\mu^2)\left(P'\frac{dP}{d\mu} - P\frac{dP'}{d\mu}\right),$$

s'annule aux deux limites par le facteur $1-\mu^2$, P et P' ne pouvant être infinis ; on aura donc nécessairement

$$[n'(n'+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{+1} PP'\,d\mu = 0,$$

et n' différant de n,

$$(18)\qquad \int_{-1}^{+1} P_l^{(n)} P_l^{(n')}\,d\mu = 0.$$

Ce théorème important (18) donne le moyen d'isoler chaque coefficient des identités (14) et de déterminer leurs valeurs. Multipliant les deux équations (14) par $P_l^{(n)} d\mu$, intégrant de $\mu = -1$ à $\mu = +1$, et posant

$$(19)\qquad \int_{-1}^{+1} (P_l^{(n)})^2\,d\mu = p_l^{(n)},$$

on obtient définitivement les formules générales

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} G_l^{(n)} &= \frac{1}{\omega_l p^{(n)}}\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi,\mu)\cos l\psi\,d\psi\,d\mu, \\ H_l^{(n)} &= \frac{1}{\omega_l p_l^{(n)}}\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi,\mu)\sin l\psi\,d\psi\,d\mu. \end{aligned}\right.$$

Enfin, après la substitution de ces valeurs, la double série (11) ou (12) sera la fonction cherchée.

§ CLXVIII.

DÉVELOPPEMENT DE F (ψ, μ).

Désignant ψ par α, μ par β sous les intégrales définies doubles (20), et substituant les nouvelles valeurs dans l'équation (13), elle devient

$$(21) \qquad F(\psi, \mu) = \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{n=l}^{n=\infty} P_l^{(n)}(\mu) \frac{\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}(\beta) \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha, \beta) \cos l(\psi - \alpha)\, d\alpha\, d\beta}{\omega_l\, p_l^{(n)}},$$

par une réduction facile; formule qui développe en série une fonction quelconque des coordonnées sphériques ψ et μ, genre de développement qui seul permet de constater que la fonction V (12) vérifie la seconde condition en même temps que la première.

Ce qui caractérise spécialement la solution qui précède, et en général les solutions de tous les problèmes de mécanique céleste et de physique mathématique, où l'on emploie les coordonnées sphériques, c'est la fonction P, c'est-à-dire le facteur qui contient μ, ou le sinus de la latitude, dans chaque terme simple du développement en série. On verra que cette fonction a une grande analogie avec les fonctions des (A_i, B_i, C_i) qui se présentent quand on emploie les coordonnées elliptiques, et qu'elle n'est réellement qu'un cas particulier de ces fonctions plus générales. D'après cela, il importe d'étudier succinctement les propriétés principales des diverses fonctions $P_l^{(n)}$; ce qui nous donnera d'ailleurs l'occasion d'évaluer l'intégrale définie (19), placée en dénominateur dans la formule (21).

§ CLXIX.

RELATION DIFFÉRENTIELLE ENTRE LES $P_l^{(n)}$.

Soit représentée par $\mathfrak{P}$ la fonction $P_l^{(n-1)}$, elle vérifiera l'équation différentielle

$$(22)\qquad \frac{d(1-\mu^2)\frac{d\mathfrak{P}}{d\mu}}{d\mu}=\left[\frac{l^2}{1-\mu^2}-n(n-1)\right]\mathfrak{P},$$

que l'on obtient en changeant n en $n-1$ dans (5). Or si l'on prend

$$(23)\qquad \Phi=n\mu\mathfrak{P}-(1-\mu^2)\frac{d\mathfrak{P}}{d\mu},$$

cette fonction Φ sera égale à $P_l^{(n)}$ multiplié par un facteur constant. En effet, différentiant (23), ayant égard à (22) et multipliant ensuite par $1-\mu^2$, on a

$$(1-\mu^2)\frac{d\Phi}{d\mu}=[n^2(1-\mu^2)-l^2]\mathfrak{P}+n\mu(1-\mu^2)\frac{d\mathfrak{P}}{d\mu},$$

différentiant une seconde fois, et se servant encore de (22), il vient

$$\frac{d(1-\mu^2)\frac{d\Phi}{d\mu}}{d\mu}=\left[n(n+1)-\frac{l^2}{1-\mu^2}\right](1-\mu^2)\frac{d\mathfrak{P}}{d\mu}$$
$$+n\mu\mathfrak{P}\left[\frac{l^2}{1-\mu^2}-n(n+1)\right],$$

c'est-à-dire, en réunissant, et d'après (23),

$$\frac{d(1-\mu^2)\frac{d\Phi}{d\mu}}{d\mu}=\left[\frac{l^2}{1-\mu^2}-n(n+1)\right]\Phi,$$

équation différentielle identique avec (5); donc Φ, qui, d'après sa composition en $\mathfrak{P}$, est fini pour $\mu=0$, ne sera autre que l'intégrale particulière $P_l^{(n)}$, multipliée par une constante.

Soit k cette constante, on aura

$$(24) \qquad k\,\mathrm{P}_l^{(n)} = n\mu\,\mathfrak{P} - (1-\mu^2)\frac{d\mathfrak{P}}{d\mu}$$

identiquement, c'est-à-dire quel que soit μ. On a, d'après (10), et en se bornant au premier terme de chaque parenthèse,

$$\mathrm{P}_l^{(n)} = (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}(\mu^{n-l} - \ldots), \qquad \mathfrak{P} = (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}(\mu^{n-l-1} - \ldots).$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{P}}{d\mu} &= (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}-1}(-l\mu^{n-l} + \ldots)\\ &+ (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}[(n-l-1)\mu^{n-l-2} - \ldots];\end{aligned}$$

substituant dans (24) et réduisant au second membre, il vient

$$(1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}(k\mu^{n-l} - \ldots) = (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}[(2n-1)\mu^{n-l} - \ldots];$$

or, les deux parenthèses devant être identiques et, par suite, leurs premiers termes égaux, il faut que k soit $2n-1$. On a ainsi la relation

$$(25) \qquad (2n-1)\,\mathrm{P}_l^{(n)} = n\mu\,\mathrm{P}_l^{(n-1)} - (1-\mu^2)\frac{d\mathrm{P}_l^{(n-1)}}{d\mu},$$

remarquable par elle-même, et dont se déduisent toutes les suivantes.

§ CLXX.

RELATION INTÉGRALE ENTRE LES $\mathrm{P}_l^{(n)}$.

Différentiant (25), il vient, d'après l'équation (22) où $\mathfrak{P}$

représente $P_l^{(n-1)}$,

$$(26)\quad (2n-1)\frac{dP_l^{(n)}}{d\mu} = \left(n^2 - \frac{l^2}{1-\mu^2}\right) P_l^{(n-1)} + n\mu\frac{dP_l^{(n-1)}}{d\mu}.$$

L'élimination de la dérivée $\dfrac{dP_l^{(n-1)}}{d\mu}$ entre (25) et (26) donne la première formule du groupe

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{n^2-l^2}{2n-1} P_l^{(n-1)} = n\mu P_l^{(n)} + (1-\mu^2)\dfrac{dP_l^{(n)}}{d\mu}, \\ (2n+1) P_l^{(n+1)} = (n+1)\mu P_l^{(n)} (-1-\mu^2)\dfrac{dP_l^{(n)}}{d\mu}; \end{cases}$$

la seconde provient de la relation (25), dans laquelle on a changé n en $n+1$. Enfin, additionnant ces deux dernières formules, membre à membre, on élimine la dérivée de $P_l^{(n)}$, et l'on a

$$(28)\qquad P_l^{(n+1)} = \mu P_l^{(n)} - \frac{n^2-l^2}{4n^2-1} P_l^{(n-1)},$$

relation dont l'importance est manifeste.

§ CLXXI.

DÉTERMINATION DE $\int_{-1}^{+1} P^2(\mu)\, d\mu$.

D'après le théorème (18), si l'on multiplie la relation (28) par $P_l^{(n+1)} d\mu$, et qu'on intègre entre -1 et $+1$, on aura

$$\int_{-1}^{+1} (P_l^{(n+1)})^2 d\mu = \int_{-1}^{+1} \mu P_l^{(n)} P_l^{(n+1)} d\mu;$$

changeant n en $n-1$, puis revenant à (28) multiplié par $P_l^{(n-1)}\,d\mu$, et intégré comme ci-dessus, on a successivement

$$\int_{-1}^{+1}(P_l^{(n)})^2\,d\mu \left\{\begin{aligned} &= \int_{-1}^{+1}\mu\,P_l^{(n-1)}P_l^{(n)}\,d\mu\\ &= \frac{n^2-l^2}{4n^2-1}\int_{-1}^{+1}(P_l^{(n-1)})^2\,d\mu\\ &= \prod_{j=l+1}^{j=n}\left(\frac{j^2-l^2}{4j^2-1}\right)\cdot\int_{-1}^{+1}(P_l^{(l)})^2\,d\mu,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(29)\qquad p_l^{(n)} = p_l^{(l)}\cdot\prod_{j=l+1}^{j=n}\left(\frac{j^2-l^2}{4j^2-1}\right).$$

Or, d'après sa valeur générale (10), et puisque $\sqrt{1-\mu^2}$ est le cosinus de la latitude θ, on a

$$P_l^{(l)} = \cos^l\theta,\quad p_l^{(l)} = \int_{-1}^{+1}(P_l^{(l)})^2\,d\mu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2l+1}\theta\,d\theta;$$

et rappelant la formule classique

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2l+1}\theta\,d\theta = \frac{2l}{2l+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\pi}\cos^{2l-1}\theta\,d\theta,$$

il s'ensuivra

$$(30)\qquad p_l^{(l)} = \frac{2l}{2l+1}\,p_{l-1}^{(l-1)} = 2\prod_{i=1}^{i=l}\left(\frac{2i}{2i+1}\right),$$

car, $P_0^{(0)}$ étant l'unité, $p_0^{(0)}$ est égal à 2; et cette valeur, substituée dans (29), donne numériquement

$$(31)\quad \int_{-1}^{+1} (P_l^{(n)})^2 d\mu = p_l^{(n)} = 2 . \prod_{i=1}^{i=l} \left(\frac{2i}{2i+1}\right) . \prod_{j=l+1}^{j=n} \left(\frac{j^2-l^2}{4j^2-1}\right).$$

Ainsi le dénominateur des coefficients (20), ou celui du terme général, dans le développement (21), ne contient d'autre nombre transcendant que π, qui est introduit par ω_l. On verra, par les leçons qui vont suivre, que cette propriété s'étend à tous les ellipsoïdes.

SEIZIÈME LEÇON.

Cas de l'ellipsoïde de révolution planétaire. — Formes diverses des facteurs du terme simple. — Leur coïncidence avec la fonction $P(\mu)$. — Nouvelle forme de cette fonction. — Définition des fonctions isothermes.

§ CLXXII.

CAS DE L'ELLIPSOIDE PLANÉTAIRE.

Essayons maintenant de résoudre le problème général énoncé au § 152 pour les corps de forme ellipsoïdale, et considérons d'abord les solides de révolution.

Exemple V. — Le corps solide est un ellipsoïde de révolution planétaire, ou dans lequel la distance des pôles est moindre que le diamètre de l'équateur. Tous les points de sa surface ont des températures fixes et diverses. Il s'agit de trouver une fonction V qui exprime la température des points situés à l'intérieur.

Soient r le rayon de l'équateur et $2r'$ l'axe polaire. Si l'on prend $c = \sqrt{r^2 - r'^2}$ dans les équations et les formules des §§ 97 et 149, il s'agira de déterminer une fonction V de (θ, β, γ) : 1° qui vérifie l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad (\rho^2 - \lambda^2)\frac{d^2 V}{d\theta^2} + \rho^2 \frac{d^2 V}{d\beta^2} + \lambda^2 \frac{d^2 V}{d\gamma^2} = 0,$$

dans laquelle λ et ρ sont les fonctions

$$(2) \qquad \lambda = \frac{c}{E(\beta)}, \quad \rho = \frac{c}{\cos\gamma},$$

inverses des transcendantes

$$(3) \qquad \beta = c\int_{\lambda}^{c} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}}, \quad \gamma = c\int_{c}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-c^2}},$$

prises pour coordonnées; 2° et qui se réduise à une fonction donnée $F(\theta, \beta)$ quand $\rho = r$, ou quand γ atteint la valeur $c\int_{c}^{r} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-c^2}}$.

Conformément à la marche uniforme des exemples précédents, V se composera d'une somme de termes simples, vérifiant chacun l'équation (1), et multipliés par des coefficients d'abord arbitraires. Chaque terme simple $U = QPR$ sera le produit de trois facteurs, Q ne contenant que la coordonnée θ, P que β, R que γ. Substituant dans l'équation (1) le produit QPR à V, et divisant par ce produit même, on aura

$$(4) \qquad (\rho^2-\lambda^2)\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \rho^2\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\beta^2} + \lambda^2\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\gamma^2} = 0.$$

Par les mêmes raisons que pour la sphère, V, et par suite Q, ne pourront contenir l'angle azimutal θ que sous les lignes trigonométriques sinus et cosinus, et leurs développements en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ que des puissances positives; d'où il suit encore que Q peut n'être que le sinus ou le cosinus d'un arc $l\theta$, l étant essentiellement un nombre entier; alors Q vérifiera l'équation différentielle

$$(5) \qquad \frac{d^2Q}{d\theta^2} + l^2Q = 0.$$

§ CLXXIII.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES NOUVEAUX FACTEURS.

Par la substitution de $-l^2$ à la place de la fraction

$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\theta^2}$, l'équation (4) se met facilement sous la forme

$$\frac{l^2 - \frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\beta^2}}{\lambda^2} = \frac{\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\gamma^2} + l^2}{\rho^2};$$

le premier membre ne peut avoir d'autre variable que β, le second que γ; leur égalité exige donc qu'ils soient constants. Soit $\frac{h}{c^2}$ leur valeur commune, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2P}{d\beta^2} &= \left(l^2 - h\frac{\lambda^2}{c^2}\right)P,\\ \frac{d^2R}{d\gamma^2} &= \left(h\frac{\rho^2}{c^2} - l^2\right)R,\end{aligned}\right.$$

équations différentielles que les fonctions P et R doivent vérifier.

Si l'on prend respectivement les paramètres géométriques λ et ρ pour les variables des facteurs P et R, les relations (3) donnant

$$c^2\frac{d^2P}{d\beta^2} = \lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}\,\frac{d\lambda\sqrt{c^2-\lambda^2}\,\frac{dP}{d\lambda}}{d\lambda},$$

$$c^2\frac{d^2R}{d\gamma^2} = \rho\sqrt{\rho^2-c^2}\,\frac{d\rho\sqrt{\rho^2-c^2}\,\frac{dR}{d\rho}}{d\rho},$$

les équations différentielles (6), en changeant les signes de la première, se transforment dans les suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda^4 - c^2\lambda^2)\frac{d^2P}{d\lambda^2} + (2\lambda^3 - c^2\lambda)\frac{dP}{d\lambda} = (h\lambda^2 - l^2c^2)P,\\ &(\rho^4 - c^2\rho^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - c^2\rho)\frac{dR}{d\rho} = (h\rho^2 - l^2c^2)R,\end{aligned}\right.$$

lesquelles sont identiques; c'est-à-dire que leurs intégrales générales se composeront de la même manière, P en λ, R en ρ.

Mais les conditions imposées à la fonction V, par la nature de la question traitée, peuvent restreindre les facteurs P et R à n'être que des intégrales particulières, qui ne se correspondent pas.

Si l'on prend respectivement, pour les variables des facteurs P et R, les paramètres géométriques $\lambda' = \sqrt{c^2 - \lambda^2}$, $\rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2}$, demi-axes polaires des surfaces conjuguées, les §§ 16 et 15 donnant

$$\beta = c \int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{c^2 - \lambda'^2}, \quad \gamma = c \int_0^{\rho'} \frac{d\rho'}{\rho'^2 + c^2},$$

il s'ensuit

$$c^2 \frac{d^2 P}{d\beta^2} = (c^2 - \lambda'^2) \frac{d(c^2 - \lambda'^2)\frac{dP}{d\lambda'}}{d\lambda'},$$

$$c^2 \frac{d^2 R}{d\gamma^2} = (\rho'^2 + c^2) \frac{d(\rho'^2 + c^2)\frac{dR}{d\rho'}}{d\rho'},$$

et les équations (6) deviennent, en remplaçant dans les seconds membres λ^2 par $c^2 - \lambda'^2$, ρ^2 par $\rho'^2 + c^2$, et divisant par ces nouvelles valeurs :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(c^2 - \lambda'^2)\frac{dP}{d\lambda'}}{d\lambda'} &= \left(\frac{l^2 c^2}{c^2 - \lambda'^2} - h \right) P, \\ \frac{d(\rho'^2 + c^2)\frac{dR}{d\rho'}}{d\rho'} &= \left(h - \frac{l^2 c^2}{\rho'^2 + c^2} \right) R; \end{aligned} \right.$$

ici les intégrales générales différeront, en ce que, connaissant celle de la fonction P en λ', il faudra y changer c^2 en $-c^2$, en même temps que λ' en ρ', pour en déduire celle de R.

§ CLXXIV.

COINCIDENCE AVEC LA FONCTION P (μ).

Si l'on suppose maintenant P et R développés suivant les puissances de λ' et ρ', ces puissances devront être toutes positives : car, pour les points du corps situés sur le plan de l'équateur, on a ou $\lambda' = 0$, ou $\rho' = 0$, et la fonction V cherchée doit être finie pour ces valeurs. Ainsi restreintes, et de la même manière, les deux intégrales particulières, seules admissibles, des équations (8), se correspondront, et l'une se déduira de l'autre par les changements qui viennent d'être indiqués. Le facteur R étant un polynôme du degré n en ρ', ce polynôme sera évidemment homogène en ρ' et c; c'est-à-dire que tous ses termes, à l'exception du premier, auront pour facteur une puissance positive de c, en sorte que, si l'on y faisait $c = 0$, auquel cas le système ellipsoïdal deviendrait le système sphérique, R se réduirait à ρ^n, comme cela devait être; or la seconde équation différentielle (7) ou (8) devenant alors $\dfrac{d\rho^2 \dfrac{dR}{d\rho}}{d\rho} = hR$, il faut nécessairement que h soit $n(n+1)$.

Substituant cette valeur trouvée de h dans les équations (8), et remplaçant $\frac{\lambda'}{c}$ par μ dans la première, elles deviennent

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(1-\mu^2)\dfrac{dP}{d\mu}}{d\mu} &= \left[\frac{l^2}{1-\mu^2} - n(n+1)\right] P, \\ \frac{d(c^2+\rho'^2)\dfrac{dR}{d\rho'}}{d\rho'} &= \left[n(n+1) - \frac{l^2 c^2}{c^2+\rho'^2}\right] R, \end{aligned} \right.$$

et lorsqu'on aura trouvé l'intégrale particulière de P en μ, il suffira d'y changer μ en $\frac{\rho'}{c}\sqrt{-1}$, pour en déduire le facteur R. Or cette intégrale particulière, nous la connaissons : elle n'est autre que la fonction $P_l^{(n)}$ (10), § 165, relative à la sphère; car toutes les conditions imposées au sinus de la latitude sont applicables, sans exception, au rapport $\frac{\lambda'}{c}$. [Entre autres, celle-ci : l'équation de l'axe polaire étant $\lambda = 0$, quel que soit θ, il s'ensuit, comme pour la sphère, que $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont inséparables du facteur $\frac{\lambda}{c}$, et Q, c'est-à-dire $\sin l\theta$ ou $\cos l\theta$, de $\left(\frac{\lambda}{c}\right)^l$ ou $\left[1-\left(\frac{\lambda'}{c}\right)^2\right]^{\frac{l}{2}}$, facteur que P doit conséquemment contenir.]

Il résulte de la coïncidence, qui vient d'être établie, que les facteurs P et R de l'exemple actuel, ou les intégrales particulières admissibles des équations (9), seront

$$(10) \qquad P = P_l^{(n)}\left(\frac{\lambda'}{c}\right), \quad R = P_l^{(n)}\left(\frac{\rho'}{c}\sqrt{-1}\right).$$

Rappelons que, d'après les §§ 16 et 15, les fonctions inverses des paramètres thermométriques, prises ici comme variables, ont les valeurs

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\lambda'}{c} = \frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)}, & \text{d'où } \frac{\lambda}{c} = \left[1-\left(\frac{\lambda'}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{E(\beta)}, \\ \frac{\rho'}{c} = \operatorname{tang}\gamma, & \text{d'où } \frac{\rho}{c} = \left[1+\left(\frac{\rho'}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \operatorname{séc}\gamma. \end{cases}$$

§ CLXXV.

EXPRESSION DE LA TEMPÉRATURE.

D'après la forme de la fonction $P_l^{(n)}$ [(10), § 165], l'introduction de $\frac{\rho'}{c}\sqrt{-1}$ au lieu de sa variable donnera pour R une fonction réelle de ρ', que nous désignerons par $\mathfrak{R}(\rho')$, multipliée par un facteur constant, qui sera ± 1, $\pm\sqrt{-1}$, suivant les parités des entiers l et n; ce facteur peut être réuni au coefficient arbitraire qui doit multiplier le terme simple; on peut inversement emprunter à ce coefficient un autre facteur pareillement constant, et prendre $R = \frac{\mathfrak{R}(\rho')}{\mathfrak{R}(r')}$, de telle sorte que R se réduise à l'unité pour $\rho' = r'$, ou sur la surface du solide proposé; ce qui simplifiera la recherche ultérieure.

Enfin on peut laisser μ comme variable dans la fonction $P_l^{(n)}$ qui exprime le facteur P, en se rappelant qu'il ne s'agit plus d'un sinus de latitude, mais de la fonction inverse $\frac{\lambda'}{c}$ ou $\frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)}$. Et, puisque le paramètre géométrique λ' varie de $-c$ à $+c$ sur la surface des ellipsoïdes actuels (la coordonnée thermométrique β variant de $-\infty$ à $+\infty$, § 97), cette nouvelle valeur $\frac{\lambda'}{c}$ de μ aura les mêmes limites -1 et $+1$ que pour la sphère.

La solution est maintenant toute tracée. La série V se présentera sous la forme

$$(12)\qquad V = \sum_{l=0}^{l=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \cos l\theta \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} G_l^{(n)} \frac{\mathfrak{R}(\rho')}{\mathfrak{R}(r')} P_l^{(n)} \\ + \sin l\theta \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} H_l^{(n)} \frac{\mathfrak{R}(\rho')}{\mathfrak{R}(r')} P_l^{(n)} \end{array} \right\}.$$

La fonction donnée F étant exprimée en θ et en

$$\mu = \frac{\lambda'}{c} = \frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)},$$

et V devant se réduire à cette fonction quand $\rho' = r'$, on aura à identifier le développement

$$(13)\ \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\cos l\theta \sum_{n=l}^{n=\infty} G_l^{(n)}\ P_l^{(n)} + \sin l\theta \sum_{n=l}^{n=\infty} H_l^{(n)}\ P_l^{(n)} \right] = F(\theta, \mu).$$

Les méthodes d'élimination du § 167 s'appliquant ici sans aucune modification, on arrivera aux valeurs générales (20), même § 167, des coefficients $G_l^{(n)}$, $H_l^{(n)}$, au développement (21), § 168, en remplaçant ψ par θ. Enfin, les propriétés des fonctions $P_l^{(n)}$, et la valeur numérique de $p_l^{(n)}$, seront absolument les mêmes qu'aux §§ 169, 170, 171.

Les coefficients étant ainsi déterminés, la série double V (12) pourra être groupée de cette autre manière

$$(14)\quad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\sum_{l=0}^{l=n} (G_l^{(n)} \cos l\psi + H_l^{(n)} \sin l\psi) \frac{\mathfrak{R}(\rho')}{\mathfrak{R}(r')} P_l^{(n)} \right],$$

forme analogue à celle (11), § 166, de la série double appartenant à la sphère, mais qui en diffère en ce que le facteur $\left(\frac{\rho}{r}\right)^2$, qui était en dehors du sigma inférieur, est actuellement $\frac{\mathfrak{R}(\rho')}{\mathfrak{R}(r')}$, et placé sous ce sigma même, comme changeant à la fois avec n et avec l, ainsi que le facteur $P_l^{(n)}$.

Notre premier exemple d'un corps de forme ellipsoïdale est maintenant complet. Mais pour faciliter des rapprochements avec d'autres exemples donnant lieu à des distinctions importantes, il faut étudier de plus près les deux fonctions associées P et R, ou la composition du terme simple.

§ CLXXVI.

DOUBLE FORME DES FACTEURS P ET R.

Puisque tout facteur constant des fonctions P et R peut rentrer dans le coefficient arbitraire du terme simple, ou en être extrait, les développements des valeurs (10) s'écriront ainsi :

$$(15)\left\{\begin{aligned} P &= (c^2-\lambda'^2)^{\frac{l}{2}}\left[\lambda'^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}c^2\lambda'^{n-l-2}+\ldots\right],\\ R &= (c^2+\rho'^2)^{\frac{l}{2}}\left[\rho'^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}c^2\rho'^{n-l-2}+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on y remplace λ' par $\sqrt{c^2-\lambda^2}$, ρ' par $\sqrt{\rho^2-c^2}$, les valeurs (15), ainsi transformées en λ et ρ, seront nécessairement les intégrales particulières, admissibles et correspondantes des équations différentielles identiques (7). Il suffit donc de chercher la première qui devra reproduire la seconde, à un facteur constant près, par le simple changement de λ en ρ.

Dans la transformée de P, le facteur $(c^2-\lambda'^2)^{\frac{l}{2}}$ sera remplacé par λ^l; si les entiers n et l ont la même parité, $n-l$ étant pair, la parenthèse (multipliée, s'il est nécessaire, par -1) deviendra un polynôme à puissances paires de λ, complet et de degré $\frac{n-l}{2}$ en λ^2; alors P sera de la forme

$$(16)\quad P = \lambda^n + k_1\lambda^{n-2} + \ldots + k_s\lambda^{n-2s} + \ldots + k_{\frac{n-l}{2}}\lambda^l;$$

mais si les entiers n et l sont de parités contraires, $n-l$ étant impair, la parenthèse sera le produit du radical $\pm\sqrt{c^2-\lambda^2}$ par un polynôme à puissances paires de λ, complet et de degré $\frac{n-l-1}{2}$ en λ^2; et P aura cette autre forme

$$(17)\quad P = \sqrt{c^2-\lambda^2}\left[\begin{array}{l} \lambda^{n-1} + k'_1\lambda^{n-3} + \ldots + k'_s\lambda^{n-1-2s} \\ + \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots + k_{\frac{n-l-1}{2}}\lambda^l \end{array}\right].$$

Or si, remplaçant, dans la première (7), h par $n(n+1)$, on cherche, pour l'un ou pour l'autre cas, quelle doit être la loi du coefficient k_s, ou k'_s, telle que le polynôme (16) ou (17) vérifie cette équation différentielle, on trouve, par la méthode employée au § 165,

$$(18)\quad \begin{cases} k_s = -c^2\dfrac{(n-2s+2)^2-l^2}{2s(2n+1-2s)}k_{s-1}, \\[2ex] k'_s = -c^2\dfrac{(n-2s+1)^2-l^2}{2s(2n+1-2s)}k'_{s-1}; \end{cases}$$

et le coefficient du premier terme, c'est-à-dire k_0 ou k'_0, étant l'unité, celui du second sera

$$k_1 = -c^2\frac{n^2-l^2}{2(2n-1)}, \quad \text{ou} \quad k'_1 = -c^2\frac{(n-1)^2-l^2}{2(2n-1)};$$

celui du troisième

$$k_2 = c^4 \frac{(n^2 - l^2)[(n-2)^2 - l^2]}{2.4.(2n-1)(2n-3)},$$

ou

$$k'_2 = c^4 \frac{[(n-1)^2 - l^2][(n-3)^2 - l^2]}{2.4.(2n-1)(2n-3)},$$

et ainsi de suite. Et le polynôme se terminera au terme prévu, puisque k_s (18) s'annule, quel que soit k_{s-1} quand $s = \frac{n-l}{2} + 1$, ou puisque k'_s s'annule, quel que soit k'_{s-1} quand $s = \frac{n-l-1}{2} + 1$.

D'après cela, le groupe (15) transformé sera

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \lambda^n - \frac{(n^2 - l^2)}{2(2n-1)} c^2 \lambda^{n-2} + \ldots + \text{f}.(-c^2)^{\frac{n-l}{2}} \lambda^l, \\ R &= \rho^n - \frac{(n^2 - l^2)}{2(2n-1)} c^2 \rho^{n-2} + \ldots + \text{f}.(-c^2)^{\frac{n-l}{2}} \rho^l, \end{aligned} \right.$$

si n et l sont de même parité, ou si leur différence $n - l$ est paire, et

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \lambda' \left\{ \lambda^{n-1} - \frac{(n-1)^2 - l^2}{2(2n-1)} c^2 \lambda^{n-3} + \ldots + \text{f}'.(-c^2)^{\frac{n-l-1}{2}} \lambda^l \right\}, \\ R &= \rho' \left\{ \rho^{n-1} - \frac{(n-1)^2 - l^2}{2(2n-1)} c^2 \rho^{n-3} + \ldots + \text{f}'.(-c^2)^{\frac{n-l-1}{2}} \rho^l \right\}, \end{aligned} \right.$$

dans le cas contraire, ou si $n - l$ est impair; f et f' étant les fractions terminales, faciles à trouver; λ' et ρ' remplaçant les radicaux $\sqrt{c^2 - \lambda^2}$ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; enfin le facteur $\sqrt{-1}$ que le changement de λ en ρ dans la première équation (20) introduit dans la seconde, étant renvoyé au coefficient arbitraire.

§ CLXXVII.

COMPOSITION DES FACTEURS P ET R.

Si, dans les premières expressions (15), on remplace les facteurs des parenthèses par λ^l et ρ^l, les groupes de valeurs (15), (19) ou (20), seront des fonctions algébriques, entières et rationnelles de degré n, des paramètres géométriques λ et λ' pour P, ρ et ρ' pour R, ou des axes des surfaces isothermes conjuguées. Autrement, si l'on divise ces valeurs par c^n, elles deviennent des fonctions algébriques, entières et rationnelles de degré n des deux fonctions inverses

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{1}{E(\beta)} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda'}{c}=\frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)}, \quad \text{de } \beta \text{ pour P,}$$

$$\frac{\rho}{c}=\text{séc}\,\gamma \quad \text{et} \quad \frac{\rho'}{c}=\text{tang}\,\gamma, \quad \text{de } \gamma \text{ pour R.}$$

De plus, sous la forme (19) ou (20), les deux fonctions sont identiques, c'est-à-dire qu'elles sont composées de la même manière, l'une en λ et λ', l'autre en ρ et ρ', ou bien l'une en $\frac{1}{E(\beta)}$ et $\frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)}$, l'autre en séc$\gamma$ et tangγ.

§ CLXXVIII.

FONCTIONS ISOTHERMES.

Toute fonction qui vérifiera l'équation générale de l'équilibre des températures, quel que soit d'ailleurs le système des coordonnées, jouira de la propriété de donner une famille de surfaces isothermes, lorsqu'on l'égalera à un paramètre, variable d'une surface à l'autre, et qui sera précisément le paramètre thermométrique de cette famille. Nous appellerons cette fonction *une fonction isotherme*. Dans les exemples qui précèdent, dans celui-ci, dans ceux qui suivront, tout terme simple de la double série V est une fonction isotherme, puisqu'il doit essentiellement vérifier l'équation de l'équilibre des températures.

Le nombre des termes simples distincts qui composent le sigma limité relatif à l, dans la double série V (14), est $2n+1$ comme pour la sphère; car un seul correspond à $l=0$, et à chacune des valeurs $l=1, 2, 3, \ldots, n$, correspondent deux termes $PR\cos l\theta$, $PR\sin l\theta$ qui sont distincts par le facteur en θ. On peut donc dire que, dans le système des coordonnées (θ, β, γ) de l'ellipsoïde planétaire, à chaque valeur de l'entier n correspondent $2n+1$ fonctions isothermes $PR\cos l\theta$ ou $PR\sin l\theta$; les fonctions P et R étant des polynômes entiers et rationnels, tous de degré n et composés de la même manière dans chaque fonction isotherme, à l'aide des deux fonctions inverses de β pour P, de γ pour R.

§ CLXXIX.

IDENTITÉ INDIRECTE.

De plus, dans chacune des $2n+1$ fonctions isothermes, le groupe des facteurs polynômes P et R peut se mettre sous deux formes différentes : par la première, (19) ou (20), que suppose l'énoncé précédent, les deux polynômes sont directement identiques; par la seconde, (15), leur identité est en quelque sorte *indirecte*, tous les termes de R étant positifs, tandis que ceux de P sont alternativement positifs et négatifs. Pour l'ellipsoïde planétaire, c'est la forme pour laquelle l'identité est *indirecte* qui coïncide avec la fonction $P_l^{(n)}$ de la sphère.

§ CLXXX.

FORME NOUVELLE DE LA FONCTION P (μ).

On définit plus simplement les fonctions isothermes de l'ellipsoïde planétaire, en introduisant une forme nouvelle de la fonction $P_l^{(n)}$ relative à la sphère. Désignant la latitude par φ, et prenant la forme habituelle, cette fonction peut s'écrire ainsi :

$$(21)\qquad P_l^{(n)} = \left(\sin^{n-l}\varphi - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\sin^{n-l-2}\varphi \ldots\right)\cos^l\varphi.$$

La première valeur (15) coïncide avec elle, lorsqu'on y substitue

$$c\sin\varphi \text{ à } \lambda', \quad c\cos\varphi \text{ à } \sqrt{c^2-\lambda'^2} \quad \text{ou} \quad \text{à } \lambda,$$

et qu'on supprime le facteur c^n; on aura donc une autre forme de cette fonction, que nous désignerons alors par $\mathfrak{P}_l^{(n)}$, en faisant les mêmes substitutions, et la même suppression, dans la première valeur (19) ou (20); ce qui donnera

$$(22)\ \mathfrak{P}_l^{(n)} = \begin{cases} \left(\cos^{n-l}\varphi - \dfrac{(n^2-l^2)}{2(2n-1)}\cos^{n-l-2}\varphi + \ldots\right)\cos^l\varphi \\ \text{ou} \\ \left(\cos^{n-l-1}\varphi - \dfrac{(n-1)^2-l^2}{2(2n-1)}\cos^{n-l-3}\varphi + \ldots\right)\cos^l\varphi\sin\varphi, \end{cases}$$

suivant que $n-l$ est pair ou impair. Le polynôme (21) a pour variable le sinus de la latitude, le polynôme (22) le cosinus ; on peut donc représenter les deux formes par

$$(23)\qquad P_l^{(n)}(\sin\varphi), \quad \mathfrak{P}_l^{(n)}(\cos\varphi).$$

Afin de pouvoir employer indifféremment l'une ou l'autre de ces deux formes, dans les développements relatifs à la sphère, il faut prendre pour coordonnée la latitude elle-même et non son sinus. On remplacera donc, dans les formules qui concernent ces développements, μ par $\sin\varphi$,

$d\mu$ par $\cos\varphi\, d\varphi$, et l'on intégrera entre $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, au lieu d'intégrer entre $\mu = -1$ et $\mu = +1$. Par exemple, le théorème fondamental, (18) du § 167, s'écrira de cette manière... (24)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_l^{(n)} P_l^{(n')} \cos\varphi\, d\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mathfrak{P}_l^{(n)} \mathfrak{P}_l^{(n')} \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

les $P_l^{(n)}$, ou les $\mathfrak{P}_l^{(n)}$, étant considérés comme des fonctions de la latitude φ, exprimées par des polynômes en $\sin\varphi$, ou en $\cos\varphi$.

§ CLXXXI.

RÉSUMÉ SIMPLE.

Par cette introduction, et par cette notation, θ étant la longitude, ou l'angle azimutal des plans méridiens, les $2n+1$ fonctions isothermes de degré n, du système sphérique, auront la forme

$$(25) \qquad \rho^n \cdot \mathfrak{P}_l^{(n)}(\cos\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos l\theta \\ \text{ou} \\ \sin l\theta \end{pmatrix},$$

et celle du système actuel prendront celle-ci,

$$(26) \qquad \mathfrak{P}_l^{(n)}\left(\frac{\rho}{c}\right) \cdot \mathfrak{P}_l^{(n)}\left(\frac{\lambda}{c}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos l\theta \\ \text{ou} \\ \sin l\theta \end{pmatrix},$$

ou bien, à l'aide des coordonnées thermométriques (θ, β, γ),

$$(27) \qquad \begin{pmatrix} \cos l\theta \\ \text{ou} \\ \sin l\theta \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{P}_l^{(n)}\left(\frac{1}{E(\beta)}\right) \cdot \mathfrak{P}_l^{(n)}(\text{séc}\gamma).$$

La forme (26), rapprochée de (25), résume, de la manière la plus simple, les liaisons ou la dépendance qui existent entre la sphère et l'ellipsoïde de révolution planétaire. La forme (27), rangeant les trois facteurs dans l'ordre adopté pour les paramètres thermométriques du système général, est une première indication des fonctions isothermes de ce système.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

Cas de l'ellipsoïde ovaire. — Nouvelle coïncidence des facteurs du terme simple avec la fonction P (μ). — Comparaison avec l'ellipsoïde planétaire. — Concordance et différences. — Origines de la fonction P (μ). — Développements simples et composés.

§ CLXXXII.

CAS DE L'ELLIPSOIDE OVAIRE.

Exemple VI.—Le corps solide est un ellipsoïde de révolution ovaire, ou dans lequel la distance des pôles est plus grande que le diamètre de l'équateur. Tous les points de la surface ont des températures fixes et diverses. Il faut trouver une fonction V qui exprime la température des points situés à l'intérieur.

Soient r' le rayon de l'équateur et $2r$ l'axe polaire. Si l'on prend $c = \sqrt{r^2 - r'^2}$ dans les équations et les formules des §§ 101 et 150, il s'agira de déterminer une fonction V de (α, ψ, γ) : 1° qui vérifie l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad \rho'^2 \frac{d^2 V}{d\alpha^2} + (\rho'^2 + \nu'^2) \frac{d^2 V}{d\psi^2} + \nu'^2 \frac{d^2 V}{d\gamma^2} = 0$$

dans laquelle ν' et ρ' sont les fonctions

$$(2) \qquad \nu' = \frac{c}{\mathrm{E}(\alpha)}, \qquad \rho' = \frac{c}{\mathcal{E}(\alpha)},$$

inverses des transcendantes

$$(3) \qquad \alpha = c \int_{\nu'}^{c} \frac{d\nu'}{\nu'\sqrt{c^2 - \nu'^2}}, \qquad \gamma = c \int_{\rho'}^{\infty} \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 + c^2}},$$

prises pour coordonnées; 2° et qui se réduise à une fonction donnée $F(\alpha, \psi)$, quand $\rho' = r'$, ou quand γ atteint la valeur $c\int_{r'}^{\infty} \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2+c^2}}$.

La fonction V étant composée d'une somme de termes simples, chaque terme simple $U = PQR$, produit de trois facteurs, P ne contenant que la coordonnée α, Q que ψ, R que γ, doit vérifier l'équation (1); substituant à V le produit PQR, et divisant par le même produit, cette équation devient

$$(4) \qquad \rho'^2 \cdot \frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (\rho'^2 + \nu'^2)\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\psi^2} + \nu'^2\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\gamma^2} = 0.$$

Par les mêmes raisons que pour l'ellipsoïde précédent et pour la sphère, le facteur Q peut n'être que le sinus ou le cosinus d'un arc $l\psi$, l étant essentiellement un nombre entier; alors il vérifiera l'équation

$$\frac{d^2Q}{d\psi^2} + l^2 Q = 0,$$

et la fraction $\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\psi^2}$ peut être remplacée par la constante $-l^2$ dans l'équation (4), qui se mettra sous la forme

$$\frac{l^2 - \frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\alpha^2}}{\nu'^2} = \frac{\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\gamma^2} - l^2}{\rho'^2}.$$

Le premier membre ne pouvant contenir que la variable α, le second que γ, leur valeur commune sera nécessairement une constante, et si on la désigne par $\frac{h}{c^2}$, on aura

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2P}{d\alpha^2} = \left(l^2 - h\dfrac{\nu'^2}{c^2}\right)P, \\[2ex] \dfrac{d^2R}{d\gamma^2} = \left(l^2 + h\dfrac{\rho'^2}{c^2}\right)R; \end{cases}$$

équations différentielles que les facteurs P et R doivent vérifier.

§ CLXXXIII.

ÉQUATIONS DES NOUVEAUX FACTEURS.

Si l'on prend respectivement, pour variables des facteurs P et R, les paramètres géométriques ν' et ρ', les relations (3) donnant

$$c^2\frac{d^2 P}{d\alpha^2} = \nu'\sqrt{c^2-\nu'^2}\,\frac{d\nu'\sqrt{c^2-\nu'^2}\,\frac{dP}{d\nu'}}{d\nu'},$$

$$c^2\frac{d^2 R}{d\gamma^2} = \rho'\sqrt{\rho'^2+c^2}\,\frac{d\rho'\sqrt{\rho'^2+c^2}\,\frac{dR}{d\rho'}}{d\rho'},$$

et ces valeurs étant substituées dans les équations (5), préalablement multipliées par c^2, on a, en développant, et changeant les signes de la première,

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&(\nu'^4-c^2\nu'^2)\frac{d^2P}{d\nu'^2}+(2\nu'^3-c^2\nu')\frac{dP}{d\nu'}=(h\nu'^2-l^2c^2)\,\mathrm{P},\\&(\rho'^4+c^2\rho'^2)\frac{d^2R}{d\rho'^2}+(2\rho'^3+c^2\rho')\frac{dR}{d\rho'}=(h\rho'^2+l^2c^2)\,\mathrm{R}.\end{aligned}\right.$$

D'où il suit que, l'intégrale générale de la fonction P étant connue, il suffira d'y changer c^2 et $-c^2$ en même temps que ν' en ρ', pour obtenir celle de la fonction R. Mais les facteurs P et R du terme simple V ne peuvent être que des intégrales particulières : en effet, pour tout point du solide, situé sur l'axe de révolution du système coordonné, ν' ou ρ' étant nul, et la température V devant y rester finie, les facteurs P et R doivent être des intégrales particulières qui ne deviennent pas infinies pour $\nu'=0$, $\rho'=0$. Ces intégrales, ainsi restreintes, et de la même manière, se correspondront, et l'une se déduira de l'autre, par les changements qui viennent d'être indiqués.

Si maintenant on prend respectivement pour variables des facteurs P et R les paramètres géométriques $\nu = \sqrt{c^2 - \nu'^2}$, $\rho = \sqrt{\rho'^2 + c^2}$ demi-axes polaires des surfaces conjuguées, les §§ 17 et 18 donnant

$$\alpha = c \int_0^\nu \frac{d\nu}{c^2 - \nu^2}, \quad \gamma = c \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^2 - c^2},$$

il s'ensuit

$$c^2 \frac{d^2 \mathrm{P}}{d\alpha^2} = (c^2 - \nu^2) \frac{d(c^2 - \nu^2) \dfrac{d\mathrm{P}}{d\nu}}{d\nu},$$

$$c^2 \frac{d^2 \mathrm{R}}{d\gamma^2} = (\rho^2 - c^2) \frac{d(\rho^2 - c^2) \dfrac{d\mathrm{R}}{d\rho}}{d\rho},$$

et les équations (5), multipliées par c^2, deviennent, en remplaçant dans les seconds membres ν'^2 par $c^2 - \nu^2$, ρ'^2 par $\rho^2 - c^2$, et divisant par ces nouvelles valeurs,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(c^2 - \nu^2) \dfrac{d\mathrm{P}}{d\nu}}{d\nu} &= \left(\frac{l^2 c^2}{c^2 - \nu^2} - h \right) \mathrm{P}, \\ \frac{d(\rho^2 - c^2) \dfrac{d\mathrm{R}}{d\rho}}{d\rho} &= \left(\frac{l^2 c^2}{\rho^2 - c^2} + h \right) \mathrm{R}, \end{aligned} \right.$$

ou bien, en développant et chassant les dénominateurs,

$$(7\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} (\nu^2 - c^2)^2 \frac{d^2\mathrm{P}}{d\nu^2} + 2\nu(\nu^2 - c^2) \frac{d\mathrm{P}}{d\nu} &= [h\nu^2 + (l^2 - h)c^2]\mathrm{P}, \\ (\rho^2 - c^2)^2 \frac{d^2\mathrm{R}}{d\rho^2} + 2\rho(\rho^2 - c^2) \frac{d\mathrm{R}}{d\rho} &= [h\rho^2 + (l^2 - h)c^2]\mathrm{R}, \end{aligned} \right.$$

équations différentielles identiques, c'est-à-dire que leurs intégrales générales se composeront de la même manière, l'une en ν, l'autre en ρ, et il en sera de même de leurs intégrales particulières admissibles, car elles ne peuvent être que les intégrales particulières correspondantes des équations différentielles (6) dans lesquelles on substituerait respectivement $\sqrt{c^2 - \nu^2}$ à ν', $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ à ρ'.

§ CLXXXIV.

COINCIDENCE AVEC LA FONCTION P(μ).

De même que dans l'exemple précédent, le facteur R, pris de degré n relativement à la ligne ρ, doit se réduire à ρ^n si $c = 0$, ou si le système coordonné devient le système sphérique, et la seconde équation (7) étant alors

$$\frac{d\rho^2 \frac{dR}{d\rho}}{d\rho} = hR,$$

il faut nécessairement que la constante h soit de la forme $n(n+1)$, n étant un nombre entier. Substituant cette valeur trouvée de h dans les équations (7), et remplaçant dans la première $\frac{\nu}{c}$ par μ, ces équations deviennent

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}}{d\mu} &= \left[\frac{l^2}{1-\mu^2} - n(n+1)\right]P, \\ \frac{d(\rho^2-c^2)\frac{dR}{d\rho}}{d\rho} &= \left[\frac{\rho^2-c^2}{l^2c^2} + n(n+1)\right]R. \end{aligned} \right.$$

De là résulte encore que le facteur P, exprimé en $\mu = \frac{\nu}{c}$, sera la fonction $P_l^{(n)}(10)$ du § 165 relatif à la sphère; car il est aisé de constater que toutes les conditions imposées au sinus de la latitude sont applicables sans exception au rapport $\frac{\nu}{c}$.

Il résulte de cette coïncidence que les facteurs P et R de l'exemple actuel, ou les intégrales particulières admissibles des équations (7), seront

$$(9)\qquad P = P_l^{(n)}\left(\frac{\nu}{c}\right),\quad R = P_l^{(n)}\left(\frac{\rho}{c}\right).$$

Rappelons que, d'après les §§ 17 et 18, les fonctions inverses des paramètres thermométriques, prises ici pour variables, ont les valeurs

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\nu}{c} = \dfrac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)}, & \text{d'où } \dfrac{\nu'}{c} = \sqrt{1-\left(\dfrac{\nu}{c}\right)^2} = \dfrac{1}{E(\alpha)}, \\[2ex] \dfrac{\rho}{c} = \dfrac{E(\gamma)}{\mathcal{E}(\gamma)}, & \text{d'où } \dfrac{\rho'}{c} = \sqrt{\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^2 - 1} = \dfrac{1}{\mathcal{E}(\gamma)}. \end{cases}$$

§ CLXXXV.

EXPRESSION DE LA TEMPÉRATURE.

D'après la forme de la fonction $P_l^{(n)}$, l'introduction de $\frac{\rho}{c}$ au lieu de la variable, et le changement de signe de $\left[1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^2\right]$, donneront pour R une fonction réelle de ρ, que nous désignerons par $\mathfrak{R}'(\rho)$, multipliée par un facteur constant qui sera ± 1, $\pm\sqrt{-1}$ suivant les parités des entiers l et n, et qui peut être réuni au coefficient arbitraire du terme simple. Empruntant un autre facteur constant au même coefficient, on peut prendre $R = \frac{\mathfrak{R}'(\rho)}{\mathfrak{R}'(r)}$, afin que R se réduise à l'unité pour $\rho = r$, ou sur la surface du corps solide proposé.

Au lieu de $\frac{\nu}{c} = \frac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)}$, variable de la fonction $P_l^{(n)}$ qui exprime le facteur P, on peut écrire μ; et puisque le paramètre géométrique ν varie de $-c$ à $+c$, sur les ellipsoïdes actuels (la coordonnée thermométrique α variant de $-\infty$ à $+\infty$, § 101), les limites de $\mu = \frac{\nu}{c}$ seront -1 et $+1$, comme pour la sphère.

La fonction V cherchée se présentera donc sous la forme

$$(11) \qquad V = \sum_{l=0}^{l=\infty} \left\{ \begin{array}{c} \cos l\psi \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} G_l^{(n)} \frac{\mathfrak{R}'(\rho)}{\mathfrak{R}'(r)} P_l^{(n)}(\mu) \\ + \sin l\psi \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} H_l^{(n)} \frac{\mathfrak{R}'(\rho)}{\mathfrak{R}'(r)} P_l^{(n)}(\mu) \end{array} \right\},$$

et la fonction donnée F, exprimée en ψ et en

$$\mu = \frac{\nu}{c} = \frac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)},$$

étant développée par la formule (21) du § 168, il faudra et il suffira que les constantes $G_l^{(n)}$, $H_l^{(n)}$ aient les valeurs (20) du § 167, pour que V (11) satisfasse à la dernière condition.

Les coefficients étant ainsi déterminés, cette double série (11) pourra être groupée de cette autre manière

$$(12) \quad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\sum_{l=0}^{l=n} \left(G_l^{(n)} \cos l\psi + H_l^{(n)} \sin l\psi \right) \frac{\mathfrak{R}'(\rho)}{\mathfrak{R}'(r)} P_l^{(n)}\left(\frac{\nu}{c}\right) \right],$$

le facteur en ρ étant placé sous le second sigma, comme changeant à la fois avec l et avec n, ainsi que $P_l^{(n)}\left(\frac{\nu}{c}\right)$.

§ CLXXXVI.

DOUBLE FORME DES FACTEURS.

Étudions encore la composition du terme simple, dans ce second exemple d'un corps solide de forme ellipsoïdale. Puisque tout facteur constant des fonctions P et R peut rentrer dans le coefficient arbitraire du terme simple, ou en provenir, les développements des valeurs (9) peuvent s'écrire ainsi :

$$(13) \begin{cases} P = (c^2 - \nu^2)^{\frac{l}{2}} \left[\nu^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} c^2 \nu^{n-l-2} + \ldots \right], \\ R = (\rho^2 - c^2)^{\frac{l}{2}} \left[\rho^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} c^2 \rho^{n-l-2} + \ldots \right]. \end{cases}$$

Si l'on y remplace ν par $\sqrt{c^2 - \nu'^2}$, ρ par $\sqrt{\rho'^2 + c^2}$, les valeurs (13), ainsi transformées en ν' et ρ', seront nécessairement les intégrales particulières, admissibles et correspondantes des équations différentielles (6). Il suffit donc de chercher la première qui devra reproduire la seconde, à un facteur constant près, en y changeant à la fois $+ c^2$ en $- c^2$, et ν' en ρ'.

Dans la transformée de P, le facteur $(c^2 - \nu^2)^{\frac{l}{2}}$ sera remplacé par ν'^l. Si $n - l$ est pair, la parenthèse (multipliée par -1 s'il est nécessaire) sera un polynôme complet de degré $\frac{n-l}{2}$ en ν'^2, et conformément à la première loi des coefficients du § 176, qui s'applique ici sans aucune modification, P et, par suite, R seront de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} P = \nu'^n - \dfrac{n^2 - l^2}{2(2n-1)} c^2 \nu'^{n-2} + \ldots + f.(-c^2)^{\frac{n-l}{2}} \nu'^l, \\ R = \rho'^n + \dfrac{n^2 - l^2}{2(2n-1)} c^2 \rho'^{n-2} + \ldots + f.c^{n-l} \rho'^l. \end{cases}$$

Si $n - l$ est impair, la parenthèse sera le produit de $\pm \sqrt{c^2 - \nu'^2}$ par un polynôme complet de degré $\dfrac{n-l-1}{2}$ en ν'^2, et d'après la seconde loi des coefficients du § 176, P et, par suite, R auront cette autre forme:

$$(15)\quad \begin{cases} P = \nu \left[\nu'^{n-1} - \dfrac{(n-1)^2 - l^2}{2(2n-1)} c^2 \nu'^{n-3} \ldots + f'.(-c^2)^{\frac{n-l-1}{2}} \nu'^l\right], \\ R = \rho \left[\rho'^{n-1} + \dfrac{(n-1)^2 - l^2}{2(2n-1)} c^2 \rho'^{n-3} \ldots + f'.c^{n-l-1} \rho'^l\right]; \end{cases}$$

f et f′ étant les fractions terminales que les lois des coefficients donnent sans peine; ν et ρ remplaçant les deux radicaux $\sqrt{c^2 - \nu'^2}$ et $\sqrt{\rho'^2 + c^2}$, enfin le facteur $\sqrt{-1}$, que les changements de $-c^2$ en $+c^2$ et de ν' en ρ' dans la première (15) introduisent dans la seconde, étant renvoyé au coefficient arbitraire.

§ CLXXXVII.

COMPOSITION DES FACTEURS.

Si, dans les premières expressions (13), on remplace les facteurs des parenthèses par ν'^l et ρ'^l, les groupes de valeurs (13) et (14) ou (15) seront des polynômes rationnels de degré n, des paramètres géométriques ν et ν' pour P, ρ et ρ' pour R, ou des axes des surfaces orthogonales conjuguées. Autrement, si l'on divise ces valeurs par c^n, elles deviennent des fonctions algébriques, entières et rationnelles, de degré n, des fonctions inverses

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\mathcal{E}(\alpha)}{\mathrm{E}(\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{\nu'}{c} = \frac{1}{\mathrm{E}(\alpha)} \text{ de } \alpha \text{ pour P},$$

$$\frac{\rho}{c} = \frac{\mathrm{E}(\gamma)}{\mathcal{E}(\gamma)} \quad \text{et} \quad \frac{\rho'}{c} = \frac{1}{\mathcal{E}(\gamma)} \text{ de } \gamma \text{ pour R}.$$

Le nombre des termes simples distincts que comprend le sigma limité relatif à l, dans la double série V (12), est $2n+1$, comme pour la sphère. On peut donc dire que, dans le système des coordonnées (α, ψ, γ) de l'ellipsoïde ovaire, à chaque valeur de l'entier n correspondent $2n+1$ fonctions isothermes de la forme PR $\cos l\psi$, ou PR $\sin l\psi$; les facteurs P et R étant des fonctions algébriques, entières et rationnelles, toutes de degré n, et composées de la même manière dans chaque fonction isotherme, à l'aide des deux fonctions inverses de α pour P, de γ pour R.

De plus, dans chaque fonction isotherme, le groupe des facteurs P et R peut se mettre sous deux formes différentes : par la première (13), que suppose l'énoncé précédent, les deux polynômes sont directement identiques; par la seconde (14) ou (15), leur identité est indirecte. Pour l'ellipsoïde ovaire, c'est la forme par laquelle l'identité est *directe* qui coïncide avec la fonction $\mathrm{P}_l^{(n)}$ de la sphère.

§ CLXXXVIII.

RAPPROCHEMENT DES DEUX ELLIPSOIDES.

En comparant les polynômes P et R, de l'une et l'autre forme appartenant aux deux systèmes d'ellipsoïdes de révolution, planétaire et ovaire, on voit : 1° que les polynômes P ont une composition *directement* identique, à l'aide du demi-axe polaire et du demi-axe équatorial, qui sont λ' et λ pour l'hyperboloïde de révolution à une nappe, ν et ν' pour l'hyperboloïde de révolution à deux nappes; 2° que les polynômes R ont une composition *indirectement* identique, à l'aide de la demi-distance des pôles et du rayon de l'équateur, qui sont ρ' et ρ pour l'ellipsoïde planétaire, ρ et ρ' pour l'ellipsoïde ovaire.

Si, comparant encore les deux systèmes, on rapproche les formes du groupe (P, R) par lesquelles l'identité est directe, et qui sont (19) ou (20), § 176, pour l'ellipsoïde planétaire, (13), § 186, pour l'ellipsoïde ovaire; elles se distinguent en ce que l'expression est double dans le premier cas et simple dans le second; mais cette distinction n'est qu'apparente. En effet, les valeurs (13) peuvent être écrites d'une autre manière. Si l'entier l est pair, les facteurs des parenthèses sont rationnels, et multipliant par ces facteurs développés, P et R se présenteront sous la forme de polynômes identiques de degré n, en ν pour P, en ρ pour R (après avoir changé, s'il est nécessaire, le signe du premier polynôme). Mais, si l est impair, la fusion ne peut être complète, il restera en dehors les radicaux $\sqrt{c^2-\nu^2}$ et $\sqrt{\rho^2-c^2}$ qu'on remplacera par ν' et ρ', et les parenthèses seront des polynômes identiques de degré $(n-1)$ (avec ou sans changement de signe).

Les valeurs (13) étant ainsi doublement exprimées, on peut dire que, dans les deux systèmes, la forme directement identique est, soit un polynôme de degré n dont la variable est le premier axe, c'est-à-dire λ, ou ν, ou ρ, soit un polynôme de degré $n-1$ de la même variable multiplié par le second axe λ', ou ν', ou ρ', conséquence importante pour la recherche définitive qui fera l'objet de la leçon suivante.

§ CLXXXIX.

RÉSUMÉ SIMPLE.

Rappelant maintenant la double forme de la fonction

$P(\mu)$ relative à la sphère, établie au § 180, et adoptant la notation (23) de ce paragraphe, si φ représente la latitude et ψ la longitude, les $2n+1$ fonctions isothermes du système sphérique auront la forme

$$(16) \qquad \rho^n . P_l^{(n)}(\sin\varphi) . \begin{pmatrix} \cos l\psi \\ \text{ou} \\ \sin l\psi \end{pmatrix},$$

et celles du second système ellipsoïdal prendront celle-ci

$$(17) \qquad P_l^{(n)}\left(\frac{\rho}{c}\right) . P_l^{(n)}\left(\frac{\nu}{c}\right) . \begin{pmatrix} \cos l\psi \\ \text{ou} \\ \sin l\psi \end{pmatrix},$$

ou bien, à l'aide des coordonnées thermométriques (α, ψ, γ),

$$(18) \qquad P_l^{(n)}\left(\frac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)}\right) . \begin{pmatrix} \cos l\psi \\ \text{ou} \\ \sin l\psi \end{pmatrix} . P_l^{(n)}\left(\frac{E(\gamma)}{\mathcal{E}(\gamma)}\right);$$

forme qui résume, de la manière la plus simple, la dépendance qui existe entre la sphère et l'ellipsoïde de révolution ovaire, et, en outre, les différences caractéristiques qui séparent ce second ellipsoïde du premier.

§ CXC.

ORIGINES DE LA FONCTION $P(\mu)$.

On voit, par tous ces rapprochements, que la forme $\mathfrak{P}_l^{(n)}(x)$ reproduit, avec l'identité directe, les facteurs P et R de chacune des $2n+1$ fonctions isothermes de degré n, dans le système de l'ellipsoïde planétaire, et que c'est la forme $P_l^{(n)}(x)$ qui jouit de la même propriété, dans le système de l'ellipsoïde ovaire. On doit regarder chacune de ces deux formes comme appartenant en propre à l'ellipsoïde qui l'emploie; c'est son origine naturelle. La sphère n'est intervenue que par la merveilleuse propriété qu'elle possède d'être à la fois la limite de tous les systèmes ellipsoïdaux, quel que soit leur module, ou d'être réellement comprise dans tous, comme l'indiquent si nettement les coordonnées sphériques générales du § 103; faculté précieuse, qui nous servira pour étudier le cas général.

§ CXCI.

CLASSEMENT DES DÉVELOPPEMENTS.

Les facteurs isolés d'une seule variable, pris dans la suite des fonctions isothermes de tous les degrés, appartenant à un même système de coordonnées, sont-ils toujours capables de former des séries simples, développant une fonction donnée de cette variable? Pour cette question générale il n'existe encore que des réponses particulières. Les six exemples que nous avons traités ne conduisent en réalité qu'à deux séries simples de cette nature. La première provient de la suite des fonctions isothermes des coordonnées rectilignes, qui donne le développement d'une fonction d'une seule variable en série de sinus et cosinus, d'où l'on déduit les développements composés, en séries multiples, des fonctions de plusieurs variables, comme dans l'exemple III. La seconde appartient aux systèmes coordonnés des ellipsoïdes planétaire et ovaire, qui donnent le développement d'une fonction d'une seule variable en série des fonctions $\mathfrak{P}_l^{(n)}$ ou $P_l^{(n)}$ ayant toutes le même indice l. La formule (21), § 168, établie dans l'exemple de la sphère, n'est qu'un développement multiple, composé des deux genres de développements simples qui viennent d'être définis. Le second genre diffère essentiellement du premier, car, lors même qu'il s'agit de la sphère, la fonction P (μ) ne peut être réduite en sinus ou cosinus d'arcs multiples.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

Cas de l'ellipsoïde à trois axes inégaux. — Méthode de recherche des facteurs du terme simple. — Identité de forme des trois facteurs. — Formes des fonctions isothermes en (A_i, B_i, C_i). — Comparaison des fonctions isothermes des divers systèmes coordonnés.

---

§ CXCII.

CAS DE L'ELLIPSOIDE A TROIS AXES.

Exemple VII.—Le corps solide est un ellipsoïde, dont les trois axes inégaux sont r, r', r''. Tous les points de sa surface ont des températures fixes et diverses. Il faut trouver une fonction V qui exprime la température des points situés à l'intérieur.

Si l'on prend

$$b = ck = \sqrt{r^2 - r'^2}, \quad c = \sqrt{r^2 - r''^2},$$

dans les formules des §§ 80 et 148, il s'agira de déterminer une fonction V de (α, β, γ) : 1° qui vérifie l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad (\rho^2 - \mu^2)\frac{d^2V}{d\alpha^2} + (\rho^2 - \nu^2)\frac{d^2V}{d\beta^2} + (\mu^2 - \nu^2)\frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0,$$

dans laquelle ν, μ, ρ, sont les fonctions

$$(2) \qquad \nu = cA(\alpha), \quad \mu = cA_1(\beta), \quad \rho = cA_2(\gamma),$$

inverses des transcendantes

$$(3)\qquad \begin{aligned} \alpha &= c\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},\\ \beta &= c\int_b^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},\\ \gamma &= c\int_c^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}, \end{aligned}$$

prises pour coordonnées; 2° et qui se réduise à une fonction donnée $F(\alpha, \beta)$ quand $\rho = r$, ou quand γ atteint la valeur

$$c\int_c^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho^2}}.$$

La fonction V étant composée d'une somme de termes simples, multipliés par des coefficients d'abord arbitraires, chaque terme sera une fonction isotherme, que les exemples précédents autorisent à mettre sous la forme d'un produit, $U = NMR$, le facteur N ne contenant que la variable α, M que β, R que γ. Ce produit étant substitué à V, l'équation (1) devient

$$(4)\qquad \frac{1}{N}\frac{d^2N}{d\alpha^2}(\rho^2-\mu^2) - \frac{1}{M}\frac{d^2M}{d\beta^2}(\nu^2-\rho^2) + \frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\gamma^2}(\mu^2-\nu^2) = 0,$$

et doit être vérifiée. La fonction qui multiplie la différence $(\rho^2-\mu^2)$ ne peut contenir que la variable α, celle qui multiplie $(\nu^2-\rho^2)$ que β, celle qui multiplie $(\mu^2-\nu^2)$ que γ. Or les trois différences, qui sont symétriques, sont telles, que leur somme est nulle, et qu'elles donnent encore une somme nulle en les ajoutant après les avoir respectivement multipliées par ν^2, μ^2, ρ^2, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$(5)\qquad \begin{aligned} (\rho^2-\mu^2) + (\nu^2-\rho^2) + (\mu^2-\nu^2) &= 0,\\ (\rho^2-\mu^2)\nu^2 + (\nu^2-\rho^2)\mu^2 + (\mu^2-\nu^2)\rho^2 &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut l'identité composée

$$(\rho^2-\mu^2)\left(h\frac{\nu^2}{c^2}-g\right)+(\nu^2-\rho^2)\left(h\frac{\mu^2}{c^2}-g\right)+(\mu^2-\nu^2)\left(h\frac{\rho^2}{c^2}-g\right)=0,$$

h et g étant deux constantes quelconques.

§ CXCIII.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES FACTEURS.

L'équation (4) sera donc vérifiée si l'on pose

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2N}{d\alpha^2}&=\left(h\frac{\nu^2}{c^2}-g\right)N,\\ \frac{d^2M}{d\beta^2}&=\left(g-h\frac{\mu^2}{c^2}\right)M,\\ \frac{d^2R}{d\gamma^2}&=\left(h\frac{\rho^2}{c^2}-g\right)R;\end{aligned}\right.$$

équations différentielles qu'il s'agit d'intégrer.

Si l'on pose, pour simplifier,

$$b^2+c^2=p,\quad b^2c^2=q,$$

et que l'on prenne respectivement pour variables des facteurs N, M, R les paramètres géométriques ν, μ, ρ, les relations (3) donnant

$$c^2\frac{d^2N}{d\alpha^2}=\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,\frac{d\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,\frac{dN}{d\nu}}{d\nu},$$

$$c^2\frac{d^2M}{d\beta^2}=\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\,\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\,\frac{dM}{d\mu}}{d\mu},$$

$$c^2\frac{d^2R}{d\gamma^2}=\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}\,\frac{d\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}\,\frac{dR}{d\rho}}{d\rho},$$

et ces valeurs étant développées, puis substituées dans les équations (6), préalablement multipliées par c^2, on a, en changeant les signes de la seconde,

$$(7)\ \begin{cases} (\nu^4 - p\nu^2 + q)\dfrac{d^2N}{d\nu^2} + (2\nu^3 - p\nu)\dfrac{dN}{d\nu} = (h\nu^2 - gc^2)N, \\ (\mu^4 - p\mu^2 + q)\dfrac{d^2M}{d\mu^2} + (2\mu^3 - p\mu)\dfrac{dM}{d\mu} = (h\mu^2 - gc^2)M, \\ (\rho^4 - p\rho^2 + q)\dfrac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - p\rho)\dfrac{dR}{d\rho} = (h\rho^2 - gc^2)R, \end{cases}$$

équations différentielles identiques.

§ CXCIV.

COINCIDENCES ET PRÉVISIONS.

Si b était nul, les facteurs M et R étant ceux, P et R, de l'ellipsoïde planétaire, la seconde et la troisième équation (7) deviendraient les équations différentielles (7) du § 173, par le changement de μ en λ et de g en l^2. Si b était égal à c, les facteurs N et R étant ceux, P et R, de l'ellipsoïde ovaire, la première et la troisième équation (7) deviendraient les équations différentielles (7 *bis*) du § 183, par le changement de g en $h - l^2$. Enfin si b et c étaient nuls à la fois, le facteur R étant celui de la sphère, la troisième équation (7) deviendrait l'équation différentielle (4) du § 163, en faisant $gc^2 = 0$, et $h = n(n+1)$. Ces coïncidences entre les équations différentielles entraînent celles de leurs intégrales admissibles.

D'après cela, comme pour les deux ellipsoïdes de révolution, les facteurs N, M, R pour l'ellipsoïde actuel se composeront de la même manière, le premier en ν, le second en μ, le troisième en ρ. De plus, la constante h qui a toujours la même forme [$n(n+1)$, où n entier] dans les trois cas particuliers et extrêmes de la sphère, de l'ellipsoïde planétaire, de l'ellipsoïde ovaire, doit avoir cette forme dans le cas général, et la constante gc^2, qui a des valeurs différentes dans les trois premiers cas, reste seule à déterminer.

Ainsi, dans les équations (7), la constante h est égale à $n(n+1)$, n étant un nombre entier. A chaque valeur de n doivent correspondre $2n+1$ fonctions isothermes de la forme $U = NMR$. Comme pour les ellipsoïdes de révolution, les facteurs N, M, R doivent être des fonctions algébriques, entières et rationnelles de degré n, des trois axes ν, ν', ν'' de l'hyperboloïde à une nappe pour N, μ, μ', μ'' de l'hyperboloïde à deux nappes pour M, ρ, ρ', ρ'' de l'ellipsoïde pour R.

Conformément à la concordance signalée au § 188, ces fonctions doivent être directement identiques, et chacune d'elles sera, soit un polynôme de degré n ayant pour variable le premier axe, soit un polynôme de degré $n-1$ de la même variable, multiplié, ou par le second axe, ou par le troisième, soit enfin un polynôme de degré $n-2$, toujours de la même variable, multiplié par le produit des deux derniers axes; cette dernière catégorie complétant, comme on le verra, le groupe des $2n+1$ fonctions isothermes. Il s'agit de constater que ces prévisions et ces analogies se réalisent sur tous les points.

§ CXCV.

MÉTHODE DE RECHERCHE. PREMIERS FACTEURS.

D'après l'identité de forme des trois facteurs, il suffit de considérer un seul d'entre eux. Adoptons R; la troisième équation (7), en remplaçant h par $n(n+1)$, et posant $gc^2 = pz$, est

$$(8)\quad (\rho^4 - p\rho^2 + q)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - p\rho)\frac{dR}{d\rho} + [pz - n(n+1)\rho^2]R = 0.$$

Cette équation doit admettre des valeurs particulières ayant la forme du polynôme

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad R = \rho^n + k_1\rho^{n-2} + k_2\rho^{n-4} + \ldots \\
+ k_{s-2}\rho^{n-2s+4} + k_{s-1}\rho^{n-2s+2} + k_s\rho^{n-2s} + \ldots .
\end{aligned}
$$

Cherchons quelle doit être la loi des coefficients k_s pour que ce polynôme (9), substitué dans l'équation (8), la rende identique. Faisant cette substitution, on reconnaît d'abord que le premier terme, qui est en ρ^{n+2}, disparaît de lui-même d'après la valeur choisie pour h, et on trouve sans peine que les termes contenant ρ avec l'exposant $(n-2s+2)$ se réunissent avec le coefficient

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-2s(2n+1-2s)k_s + p[z-(n-2s+2)^2]k_{s-1}\\
&+q(n-2s+4)(n-2s+3)k_{s-2}
\end{aligned}
\right\}.
$$

Égalant cette somme à zéro, on aura

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad 2s(2n+1-2s)k_s = p[z-(n-2s+2)^2]k_{s-1} \\
+ q(n-2s+4)(n-2s+3)k_{s-2}
\end{aligned}
$$

pour la loi cherchée.

On déduit de cette loi, en faisant successivement $s=1$, $2, 3, \ldots$, dans l'équation (10), et observant que $k_0 = 1$ et que k_{-1}, k_{-2}, n'existent pas, les relations suivantes :

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&2(2n-1)k_1 = p(z-n^2),\\
&4(2n-3)k_2 = p[z-(n-2)^2]k_1 + q.n(n-1),\\
&6(2n-5)k_3 = p[z-(n-4)^2]k_2 + q.(n-2)(n-3)k_1,\\
&8(2n-7)k_4 = p[z-(n-6)^2]k_3 + q.(n-4)(n-5)k_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

La première donnera k_1 qui sera du premier degré en z; cette valeur, substituée dans la seconde relation donnera k_2 qui sera du second degré en z; ces deux premières valeurs, substituées dans la troisième relation, donneront k_3 qui sera du troisième degré en z; et ainsi de suite. Tout coefficient k_s sera donc du degré s en z.

Mais la série (9) doit être essentiellement limitée; il faut donc que les coefficients k_s s'annulent tous à partir d'une certaine valeur de s. Cela aura lieu, si l'on peut faire en sorte que deux coefficients consécutifs soient nuls, car, en vertu de la loi (10), si k_{s-1} et k_{s-2} sont nuls, k_s le sera, ainsi que tous ceux qui le suivent; ce qui donne deux conditions à remplir, et l'on ne peut disposer pour cela que d'une seule indéterminée qui est z. Or la relation (10), qui est à trois termes, se réduit à deux termes seulement quand s égale, ou $\frac{n+4}{2}$, ou $\frac{n+3}{2}$, puisque alors le dernier terme du second membre s'annule, quel que soit k_{s-2}; l'une de ces deux valeurs de s est entière, ce sera la première si l'entier n est pair, la seconde s'il est impair.

Dans l'un ou dans l'autre cas, soit σ la valeur entière de s qui jouit de la propriété de faire disparaître le coefficient de $k_{\sigma-2}$, dans l'équation générale (10); cette relation donnera alors k_σ en $k_{\sigma-1}$ seulement, et il suffira que $k_{\sigma-1}$ soit nul, pour que k_σ le soit. Posant donc $k_{\sigma-1}=0$, on aura une équation du degré $\sigma-1$ en z, et l'une quelconque des racines de cette équation jouira de la propriété de limiter le polynôme (9) à un nombre $\sigma-1$ de termes. Il sera démontré que toutes les racines de l'équation $k_{\sigma-1}=0$ sont réelles.

Lorsque n est pair et égal à $2i$, $\sigma=\frac{n+4}{2}=i+2$, et $\sigma-1=i+1$; l'équation en z est du degré $i+1$; le polynôme (9) ne contient que des puissances paires, et son dernier terme k_i est constant. Lorsque n est impair, et égal à $2j+1$, $\sigma=\frac{n+3}{2}=j+2$, et $\sigma-1=j+1$; l'équation en z est du degré $j+1$; le polynôme (9) ne contient que des puissances impaires, et son dernier terme est $k_j\rho$.

§ CXCVI.

DEUXIÈMES FACTEURS.

L'équation différentielle (8) doit admettre des valeurs particulières ayant la forme

$$R = \rho' \mathfrak{R}, \tag{12}$$

où $\mathfrak{R}$ est

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = \rho^{n-1} + k'_1 \rho^{n-3} + k'_2 \rho^{n-5} + \ldots \\ + k'_{s-2} \rho^{n-2+4} + k'_{s-1} \rho^{n-2s+2} + k'_s \rho^{n-2s} + \ldots.\end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle que le polynôme $\mathfrak{R}$ doit vérifier, en remplaçant, dans l'équation (8), R par $\sqrt{\rho^2 - b^2}.\mathfrak{R}$, ce qui donne, par des calculs et des réductions faciles,

$$\begin{aligned}(\rho^4 - p\rho^2 + q)\frac{d^2\mathfrak{R}}{d\rho^2} + [4\rho^3 - (p + 2c^2)\rho]\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho} \\ + [pz - c^2 - (n-1)(n+2)\rho^2]\mathfrak{R} = 0.\end{aligned}$$

Substituant le polynôme $\mathfrak{R}$, on constate d'abord que le premier terme, qui est en ρ^{n+1}, disparaît de lui-même; réunissant ensuite les termes en ρ^{n-2s+1}, et égalant leur coefficient total à zéro, on a

$$\begin{aligned}\left\{ p[z - (n-2s-1)^2] - c^2(2n - 4s + 3)\right\} k'_{s-1} \\ + q(n-2s+3)(n-2s+2)k'_{s-2} = 2s(2n+1-2s)k'_s,\end{aligned} \tag{13}$$

pour la loi des coefficients k'_s, qui donnera une suite de relations semblables à celles du tableau (11), et d'où l'on conclura pareillement que k'_s est du degré s en z.

La limitation du polynôme $\mathfrak{R}$ s'obtient en faisant, dans (13), s égal à σ', σ' étant $\frac{n+2}{2}$ si n est pair, et $\frac{n+3}{2}$ si n est impair; cette valeur faisant disparaître le terme en $k'_{\sigma'-2}$, quel que soit ce coefficient, l'équation (13) donnera $k'_{\sigma'}$ en $k'_{\sigma'-1}$ seulement, et il suffira de poser $k'_{\sigma'-1}=0$, pour que $k'_{\sigma'}$ soit nul, ainsi que tous les coefficients suivants. On aura ainsi une équation en z du degré $\sigma'-1$ dont une quelconque des racines jouira de la propriété de limiter à $\sigma'-1$ le nombre des termes du polynôme $\mathfrak{R}$ (12). Les facteurs du premier degré en z qui multiplient k_{s-1} et k_{s-1} dans les deux valeurs générales (10) et (13), étant très-différents, la nouvelle équation en z sera autre que la première.

Lorsque n est pair et égal à $2i$, $\sigma'=\frac{n+2}{2}=i+1$ et $\sigma'-1=i$; la seconde équation en z est de degré i; le polynôme $\mathfrak{R}$ ne contient que des puissances impaires, et son dernier terme est $k'_{i-1}\rho$. Lorsque n est impair et égal à $2j+1$, $\sigma'=\frac{n+3}{2}=j+2$, et $\sigma'-1=j+1$; la seconde équation en z est de degré $j+1$; le polynôme $\mathfrak{R}$ ne contient que des puissances paires, et son dernier terme k_j est constant.

§ CXCVII.

TROISIÈMES ET QUATRIÈMES FACTEURS.

L'équation différentielle (8) doit pareillement admettre des valeurs particulières ayant la forme

$$(14)\quad R=\rho''\mathfrak{R}=\sqrt{\rho^2-c^2}\,(\rho^{n-1}+k''_1\rho^{n-3}+k''_2\rho^{n-5}+\ldots).$$

On reconnaît, comme pour la forme (12) et par le simple changement de b en c et de c en b, qu'il existera j valeurs de cette forme quand $n=2i$, $j+1$ quand $n=2j+1$, et que ces valeurs correspondront aux racines, en même nombre, d'une troisième équation en z, $k''_{\sigma''-1}=0$, différente des deux premières.

Enfin l'équation différentielle (8) admet encore des valeurs de la forme

$$(15)\qquad R=\rho'\rho''T,$$

où T est

$$T=\rho^{n-2}+k_1\rho^{n-4}+k_2\rho^{n-6}+\ldots$$
$$+k_{s-2}\rho^{n-2s+2}+k_{s-1}\rho^{n-2s}+k_s\rho^{n-2s-2}+\ldots.$$

On obtient l'équation différentielle que le polynôme T doit vérifier en remplaçant, dans l'équation (8), R par le produit $\sqrt{\rho^2-b^2}\,\sqrt{\rho^2-c^2}\,T$, ce qui donne

$$(\rho^4-p\rho^2+q)\frac{d^2T}{d\rho^2}+(6\rho^3-3p\rho)\frac{dT}{d\rho}$$
$$+[p(z-1)-(n-2)(n+3)\rho^2]T=0.$$

Substituant le polynôme T, on constate la disparition du premier terme, et réunissant les termes en ρ^{n-2s}, on arrive à la loi des coefficients

$$(16)\quad \begin{cases} 2s(2n+1-2s)k_s=p[(z-1)-(n-2s)(n-2s+2)]k_{s-1} \\ \qquad +q(n-2s+2)(n-2s+1)k_{s-2}, \end{cases}$$

d'où une nouvelle suite de relations donnant k_s du degré s en z.

La limitation du polynôme T s'obtient en donnant à s, dans l'équation (16), la valeur ϖ égale à $\dfrac{n+2}{2}$ si n est pair, à $\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair, et en prenant pour z une quelconque des racines de l'équation $k_{\varpi-1}=0$, différente des trois équations précédemment obtenues. Lorsque $n = 2i$, $\varpi = \frac{n+2}{2} = i+1$ et $\varpi - 1 = i$, cette quatrième équation est de degré i; le polynôme T est à puissances paires et son dernier terme k_{i-1} est constant. Lorsque $n = 2j+1$, $\varpi = \frac{n+1}{2} = j+1$ et $\varpi - 1 = j$, l'équation en z est de degré j; le polynôme T est à puissances impaires et son dernier terme est $k_{j-1}\rho$.

En résumé, quand l'entier n est pair et égal à $2i$, le facteur R peut avoir $i+1$ valeurs de la forme (9), et i de chacune des trois formes (12), (14) et (15), en tout $4i+1$ ou $2n+1$; quand n est impair et égal à $2j+1$, le facteur R peut avoir $j+1$ valeurs de chacune des trois formes (9), (12) et (14), et seulement j de la forme (15), en tout $4j+3$, ou encore $2n+1$. Les prévisions du § 194 sont donc justifiées : pour chaque valeur de l'entier n, il existe $2n+1$ fonctions isothermes $U = NMR$, où les facteurs N, M, R ont les formes indiquées dans ce paragraphe.

§ CXCVIII.

FORMES DES FONCTIONS ISOTHERMES.

Il importe de remarquer qu'ayant donné p pour facteur à z dans l'équation primitive (8), il résulte des lois ordinaires de l'homogénéité que si l'on remplace b par ck, ce qui donne

$$p = b^2 + c^2 = c^2(1+k^2), \quad q = k^2 c^4,$$

la ligne c disparaîtra des quatre équations en z, en sorte que leurs coefficients ne contiendront plus que le module k, et son complémentaire k', si l'on juge convenable de l'introduire pour simplifier ces coefficients. Par la même raison, si l'on substitue dans les facteurs N, M, R, à chaque paramètre géométrique, le produit de la ligne c par la fonction inverse (A_i, B_i, C_i) correspondante, le produit U sera divisible par c^{3n}, et renvoyant ce facteur au coefficient arbitraire, chaque fonction isotherme ne contiendra plus aucune ligne, et sera totalement exprimée à l'aide des (A_i, B_i, C_i) du module k et de la racine z qui la particularise.

Par cette transformation, si l'on indique généralement à l'aide du symbole $\mathcal{A}_i^{(j)}$ un polynôme de degré j en A_i, à puissances de même parité, et dont les coefficients restent les mêmes, quel que soit l'indice i de la fonction inverse, les $2n+1$ fonctions isothermes de degré n se répartiront, comme il est dit plus haut, entre les quatre formes

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{r} \mathcal{A}^{(n)}.\ \mathcal{A}_1^{(n)}.\ \mathcal{A}_2^{(n)},\\ BB_1B_2\,\mathcal{A}^{(n-1)}.\,\mathcal{A}_1^{(n-1)}.\ \mathcal{A}_2^{(n-1)},\\ CC_1C_2\,\mathcal{A}^{(n-1)}.\,\mathcal{A}_1^{(n-1)}.\ \mathcal{A}_2^{(n-1)},\\ BB_1B_2CC_1C_2\,\mathcal{A}^{(n-2)}.\,\mathcal{A}_1^{(n-2)}.\ \mathcal{A}_2^{(n-2)}. \end{array}\right.$$

Autrement, les quatre formes générales des facteurs admissibles N, M, R (savoir: de N si l'indice i est supprimé, de M si l'indice i est 1, de R s'il est 2) seront

$$(18)\qquad \mathcal{A}_i^{(n)},\quad B_i\mathcal{A}_i^{(n-1)},\quad C_i\mathcal{A}_i^{(n-1)},\quad B_iC_i\mathcal{A}_i^{(n-2)}.$$

§ CXCIX.

AVANTAGE DES A_i SUR LES B_i, C_i.

On pourrait pareillement exprimer ces diverses formes en introduisant les B_i ou les C_i au lieu des A_i, dans des polynômes qu'on représenterait par les symboles $\mathcal{B}_i^{(j)}$, $\Gamma_i^{(j)}$.

Mais alors les mêmes polynômes correspondant aux trois indices i, ne seraient pas toujours directement identiques, et il faudrait indiquer ceux dont l'identité ne serait qu'indirecte. L'emploi des polynômes $\mathcal{A}_i^{(j)}$ écartant cette complication dans les énoncés qui précèdent, il en résulte un avantage réel que les fonctions inverses A_i ont sur les B_i et les C_i. Toutefois, l'étude des autres énoncés pourrait conduire à des propriétés nouvelles des (A_i, B_i, C_i) ou des $2n+1$ fonctions isothermes.

§ CC.

FONCTIONS ISOTHERMES COMPARÉES.

Les recherches que nous avons dû faire dans le but de reconnaître et de définir les $2n+1$ fonctions isothermes du degré n, appartenant au système des coordonnées elliptiques (α, β, γ), ont pris un tel développement, qu'il est impossible d'achever l'exemple actuel dans cette leçon. Terminons-la par une comparaison des groupes de fonctions isothermes, appartenant à tous les systèmes de coordonnées que nous avons employés.

Dans le système des coordonnées rectilignes ou du prisme rectangle, les fonctions isothermes sont données par l'expression

$$\begin{pmatrix}\cos mx\\ \text{ou}\\ \sin mx\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos ny\\ \text{ou}\\ \sin ny\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{E}\left(z\sqrt{m^2+n^2}\right)\\ \text{ou}\\ \mathcal{E}\left(z\sqrt{m^2+n^2}\right)\end{bmatrix}.$$

Les deux premiers facteurs ont seuls la même forme, sans être cependant identiques par suite de la diversité de m et n. Toutefois, en désignant à la fois par $Q(u)$ le sinus et le cosinus d'un arc u, on peut écrire ainsi la fonction isotherme précédente.

$$Q(mx).Q(ny).Q(\sqrt{m^2+n^2}.z\sqrt{-1}),$$

et les trois facteurs sont ramenés au même type. Leur produit contient deux constantes, qui entrent séparément dans les deux premiers facteurs, et se réunissent dans le troisième.

Pour le système des coordonnées sphériques, les fonctions isothermes ont l'expression suivante

$$Q(l\psi).P(\mu).\rho^n.$$

Ici les trois facteurs ont des formes différentes, et il paraît impossible de les ramener au même type. Leur produit contient deux nombres constants, qui entrent séparément dans les deux facteurs extrêmes, et se réunissent dans celui du milieu.

Pour les deux systèmes des ellipsoïdes de révolution, les fonctions isothermes ont les expressions

$$Q(l\theta).\mathfrak{L}_l^{(n)}\left(\frac{1}{E(\beta)}\right).\mathfrak{L}_l^{(n)}(\text{séc}\,\gamma),$$

$$P_l^{(n)}\left(\frac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)}\right).Q(l\psi).P_l^{(n)}\left(\frac{E(\gamma)}{\mathcal{E}(\gamma)}\right).$$

Dans chacune d'elles, un des trois facteurs a la forme type du prisme rectangle; les deux autres ont une forme identique, qui rappelle la fonction $P(\mu)$. Leur produit contient deux nombres constants, qui se réunissent de la même manière, dans les deux facteurs identiques, tandis que le troisième n'emploie qu'un seul de ces nombres.

Enfin dans le système des coordonnées elliptiques, les fonctions isothermes s'expriment ainsi :

$$\mathcal{J}(A, B, C).\mathcal{J}(A_1, B_1, C_1).\mathcal{J}(A_2, B_2, C_2).$$

Les trois facteurs sont des polynômes identiques, qui réunissent et emploient de la même manière deux nombres constants.

§ CCI.

ORIGINE COMMUNE.

Si l'on considère que cette dernière expression appartient à une infinité de systèmes coordonnés différents, correspondants à toutes les valeurs du module k, comprises entre o et 1, tandis que le groupe des ellipsoïdes de révolution ne comprend que les deux cas particuliers aux limites de ce module, on peut dire que le système de l'ellipsoïde à trois axes est la source naturelle de toutes les fonctions isothermes appartenant à des sphéroïdes; que ce type originel subit une première déformation dans les ellipsoïdes planétaire et ovaire; puis une seconde dans le système habituel des coordonnées sphériques, qui achève de faire disparaître toute symétrie, toute identité de composition, entre les facteurs d'une même fonction isotherme.

Mais, dans ce système si déformé de la sphère, il reste encore une trace de filiation, la fonction $P(\mu)$, et cette trace nous a suffi pour reconstituer le système complet : pour retrouver d'abord deux facteurs de même forme dans les fonctions isothermes des ellipsoïdes de révolution, et reconnaître ensuite, par le rapprochement de ces nouveaux systèmes, la forme complétement symétrique des trois facteurs de toute fonction isotherme appartenant à l'ellipsoïde à trois axes inégaux. Je ne sais s'il existe, en mathématiques ou ailleurs, un exemple plus remarquable de cette marche ascendante, par laquelle on parvient à déduire le cas général d'un cas particulier.

Remarquons enfin que les neuf fonctions inverses (A_i, B_i, C_i), qui toutes résolvent les problèmes d'Euler, d'Abel, de Jacobi, à l'aide d'une seule formule pour chaque solution, ramènent aussi à une forme unique les trois facteurs de chaque fonction isotherme du système des coordonnées elliptiques. Une faculté aussi constamment active, et dans la théorie, et dans les applications, donne à l'introduction de ces fonctions un caractère plus important que celui d'une simple notation. Elle constate que ce sont bien là les véritables fonctions inverses des transcendantes elliptiques de première espèce, celles dont il était essentiel d'établir les propriétés. Toute autre peut servir, soit à lever quelque difficulté de détail, soit à établir un lien commode avec la méthode des quadratures ; mais ce n'est qu'une fonction inverse intermédiaire, dont l'abandon est indispensable quand il s'agit d'énoncer les résultats obtenus.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

Suite du cas de l'ellipsoïde à trois axes. — Réalité des racines des équations en z. — Expression de la température par huit ou par deux séries partielles. — Développement d'une fonction en série des (A_i, B_i, C_i). — Nouvelle solution pour la sphère.

§ CCII.

PROPRIÉTÉ DES FACTEURS N ET M.

Les fonctions isothermes de tous les degrés, qui appartiennent au système des coordonnées elliptiques (α, β, γ), ont été reconnues et suffisamment définies dans la leçon précédente. Il s'agit dans celle-ci de terminer l'exemple VII, c'est-à-dire de résoudre définitivement le problème général, énoncé au § 152, lorsque le corps solide a la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Dans cette seconde partie d'un même exemple, afin de faciliter les renvois, au lieu de commencer une nouvelle suite de numéros d'ordre, pour les formules et les tableaux, nous prolongerons celle de la dernière séance. Commençons par un lemme important, sur lequel repose principalement la solution dont il s'agit.

Les facteurs N, M (18), de toute fonction isotherme (17), sont tels, qu'à chacune des deux limites zéro et ϖ de la variable α, N ou $\frac{dN}{d\alpha}$ est zéro, et qu'à chacune des deux limites zéro et ϖ' de la variable β, M ou $\frac{dM}{d\beta}$ est nul. En effet, pour N, puisque $A(o) = o$, et que $B(\varpi) = o$, le tableau suivant qui contient les quatre formes de la fonction et celles de sa dérivée, constate cette propriété :

$$\begin{array}{cc}
\underbrace{\quad N \quad} & \underbrace{\qquad\qquad \frac{dN}{d\alpha} \qquad\qquad} \\
\mathcal{A}^{(n)}, & BC\,\frac{d\mathcal{A}^{(n)}}{dA}; \\
B\,\mathcal{A}^{(n-1)}, & -CA\,\mathcal{A}^{(n-1)}+B^2C\frac{d\mathcal{A}^{(n-1)}}{dA}; \\
C\,\mathcal{A}^{(n-1)}, & -BA\,\mathcal{A}^{(n-1)}+C^2B\,\frac{d\mathcal{A}^{(n-1)}}{dA}; \\
BC\,\mathcal{A}^{(n-2)}, & -(B^2+C^2)A\,\mathcal{A}^{(n-2)}+B^2C^2\frac{d\mathcal{A}^{(n-2)}}{dA}.
\end{array}$$

Quand $\alpha = \varpi$, le facteur B annule N dans la seconde et la quatrième formes, $\frac{dN}{d\alpha}$ dans la première et la troisième; quand $\alpha = 0$, le facteur A annule N dans la seconde et la troisième formes, $\frac{dN}{d\alpha}$ dans les deux autres, si l'entier n est pair; l'inverse a lieu si n est impair. Pour la fonction M, puisque $B_1(0) = 0$, et que $C_1(\varpi') = 0$, la propriété énoncée est pareillement constatée par ce second tableau :

$$\begin{array}{cc}
\underbrace{\quad M \quad} & \underbrace{\qquad\qquad \frac{dM}{d\beta} \qquad\qquad} \\
\mathcal{A}_1^{(n)}, & B_1C_1\,\frac{d\mathcal{A}_1^{(n)}}{dA_1}; \\
B_1\,\mathcal{A}_1^{(n-1)}, & C_1A_1\,\mathcal{A}_1^{(n-1)}+C_1B_1^2\,\frac{d\mathcal{A}_1^{(n-1)}}{dA_1}; \\
C_1\,\mathcal{A}_1^{(n-1)}, & -B_1A_1\,\mathcal{A}_1^{(n-1)}+B_1C_1^2\,\frac{d\mathcal{A}_1^{(n-1)}}{dA_1}; \\
B_1C_1\,\mathcal{A}_1^{(n-2)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Aux deux limites, le facteur $B_1\,C_1$ annule M dans la quatrième forme, et $\frac{dM}{d\beta}$ dans la première; quand $\beta = 0$, le facteur B_1 annule M dans la seconde forme et $\frac{dM}{d\beta}$ dans la troisième; quand $\beta = \varpi'$, le facteur C_1 annule M dans la troisième forme et $\frac{dM}{d\beta}$ dans la seconde.

D'après le lemme qui précède, si l'on désigne par N et N', ou par M et M', deux facteurs différents N ou M, appartenant à la même forme et à deux valeurs de n de même parité, l'expression $\left(N\frac{dN'}{d\alpha} - N'\frac{dN}{d\alpha}\right)$, ou $\left(M\frac{dM'}{d\beta} - M'\frac{dM}{d\beta}\right)$, s'évanouira aux deux limites zéro et ϖ ou ϖ', de α ou de β.

§ CCIII.

RÉALITÉ DES RACINES z.

Dans ce théorème, les facteurs N et N', ou M et M', peuvent appartenir à la même valeur de n et correspondre à des racines différentes de la même équation en z. De là résulte nécessairement que toutes les racines des équations en z sont réelles. En effet, supposons qu'une quelconque de ces équations ait une racine égale à $\zeta + \zeta'\sqrt{-1}$, ζ et ζ' étant réels, le facteur N correspondant sera de la forme $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'\sqrt{-1}$, $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ étant de nouveaux polynômes en (A, B, C) dont les coefficients sont réels. Mais l'existence de la racine $\zeta + \zeta'\sqrt{-1}$ exige celle de sa conjuguée $\zeta - \zeta'\sqrt{-1}$, car les coefficients de toutes les équations en z sont essentiellement réels; à cette seconde racine correspondra un nouveau facteur N' égal à $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'\sqrt{-1}$. Si l'on substitue les deux valeurs $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'\sqrt{-1}$ et $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'\sqrt{-1}$ à N et N' dans l'expression $\left(N\frac{dN'}{d\alpha} - N'\frac{dN}{d\alpha}\right)$ qui s'évanouit aux deux limites de α, elle devient

$$\left(\mathfrak{N}'\frac{d\mathfrak{N}}{d\alpha} - \mathfrak{N}\frac{d\mathfrak{N}'}{d\alpha}\right)\sqrt{-1};$$

d'où il suit que l'expression $\left(\mathfrak{N}'\frac{d\mathfrak{N}}{d\alpha} - \mathfrak{N}\frac{d\mathfrak{N}'}{d\alpha}\right)$ doit aussi être nulle pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \varpi$.

Cela posé, la valeur $N = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'\sqrt{-1}$ doit vérifier la première équation différentielle (6), où l'on remplacera d'abord h par $n(n+1)$, $\frac{\nu}{c}$ par A, g par $\frac{pz}{c^2} = (1+k^2)z$, pour y poser ensuite $z = \zeta + \zeta'\sqrt{-1}$; on doit donc avoir

$$\frac{d^2\mathfrak{N}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\mathfrak{N}'}{d\alpha^2}\sqrt{-1}$$
$$= [n(n+1)A^2 - (1+k^2)(\zeta + \zeta'\sqrt{-1})](\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'\sqrt{-1});$$

changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura l'équation que doit vérifier N', et ajoutant, puis retranchant les deux équations, il viendra séparément

$$\frac{d^2\mathfrak{N}}{d\alpha^2} = [n(n+1)A^2 - (1+k^2)\zeta]\mathfrak{N} + (1+k^2)\zeta'\mathfrak{N}',$$
$$\frac{d^2\mathfrak{N}'}{d\alpha^2} = [n(n+1)A^2 - (1+k^2)\zeta]\mathfrak{N}' - (1+k^2)\zeta'\mathfrak{N};$$

d'où l'on conclut par l'élimination du binôme en A^2

$$\mathfrak{N}'\frac{d^2\mathfrak{N}}{d\alpha^2} - \mathfrak{N}\frac{d^2\mathfrak{N}'}{d\alpha^2} = (1+k^2)\zeta'(\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{N}'^2).$$

Or, si l'on multiplie cette équation par $d\alpha$, et qu'on intègre entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \varpi$, le premier membre s'évanouira, car son intégrale indéfinie $\left(\mathfrak{N}'\frac{d\mathfrak{N}}{d\alpha} - \mathfrak{N}\frac{d\mathfrak{N}'}{d\alpha}\right)$ est nulle aux deux limites, comme on vient de l'établir, on aurait donc

$$(1+k^2)\,\zeta' \int_0^{\varpi} (\mathcal{M}^2 + \mathcal{M}'^2)\, d\alpha = 0,$$

condition impossible, si ζ' n'est pas zéro, car l'intégrale définie, dont les éléments sont essentiellement positifs, ne saurait être nulle. Ainsi les équations en z n'ont pas de racines imaginaires.

§ CCIV.

FORME DE LA FONCTION V.

Il s'agit maintenant de composer la fonction V. Les quatre formes (17) des fonctions isothermes de degré n, ou du terme simple, étant symétriques par rapport aux trois indices des fonctions inverses, on peut les écrire ainsi :

$$(19) \qquad \Pi\mathcal{A}^{(n)}, \quad \Pi B\mathcal{A}^{(n-1)}, \quad \Pi C\mathcal{A}^{(n-2)}, \quad \Pi BC\mathcal{A}^{(n-2)},$$

le symbole Π indiquant le produit de trois facteurs polynômes composés de la même manière, le premier en (A, B, C), le second en (A_1, B_1, C_1), le troisième en (A_2, B_2, C_2). Alors, séparant les groupes de termes qui correspondent aux valeurs paires $2i$ et aux valeurs impaires $2j+1$ de l'entier n, la fonction V se composera de huit séries partielles, et l'on aura

$$(20) \qquad V = \\ SG\Pi\mathcal{A}^{(2i)} + SK\Pi B\mathcal{A}^{(2j)} + SH\Pi\mathcal{A}^{(2j+1)} + SL\Pi B\mathcal{A}^{(2i-1)} \\ + S\mathcal{G}\Pi C\mathcal{A}^{(2j)} + S\mathcal{K}\Pi CB\mathcal{A}^{(2i-2)} + S\mathfrak{H}\Pi C\mathcal{A}^{(2i-1)} + S\mathcal{L}\Pi CB\mathcal{A}^{(2j-1)},$$

chaque sommation S s'étendant à un nombre infini de valeurs de n, et au nombre limité de racines z qui correspondent à ces valeurs. Par rapport à la coordonnée y, les quatre séries de la première ligne sont des fonctions paires, celles de la seconde sont des fonctions impaires, car la fonction inverse C_2 est facteur dans tous leurs termes.

Relativement à la coordonnée α, les deux premières séries de chaque ligne sont des fonctions paires, les deux dernières sont impaires, par le facteur A. Enfin, relativement à la coordonnée β, la première et la troisième série de chaque ligne sont des fonctions paires, la seconde et la quatrième sont impaires, par le facteur B_1.

§ CCV.

ÉQUATIONS A LA SURFACE.

La dernière condition du problème proposé exige que la série totale (20) se réduise à une fonction donnée des coordonnées α et β, quand $\rho = r$, ou quand γ atteint la valeur $\gamma_0 = c\int_c^r \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}$. Cette fonction donnée est nécessairement double, ou composée de deux fonctions simples, qui peuvent être très-différentes : l'une $F(\alpha, \beta)$ représente les températures fixes, à la surface de l'hémi-ellipsoïde supérieur, ou correspondant à la valeur positive $+\gamma_0$ de la coordonnée γ, l'autre $\Finv(\alpha, \beta)$ représente les températures fixes, à la surface de l'hémi-ellipsoïde inférieur, ou correspondant à la valeur négative $-\gamma_0$ de la coordonnée γ. Ainsi V (20) doit se réduire à $F(\alpha, \beta)$ pour $\gamma = +\gamma_0$, et à $\Finv(\alpha, \beta)$ pour $\gamma = -\gamma_0$; d'où l'on conclut aisément que la première ligne (20) doit se réduire à

$$\frac{F(\alpha, \beta) + \Finv(\alpha, \beta)}{2} = \mathrm{f}(\alpha, \beta) \tag{21}$$

et la seconde ligne à

$$\frac{F(\alpha, \beta) - \Finv(\alpha, \beta)}{2} = f(\alpha, \beta), \tag{22}$$

quand la transcendante γ devient γ_0. On a donc à établir les deux identités

$$(23)\qquad \mathrm{f}(\alpha,\beta)=$$
$$\mathrm{SG}\,\Pi'\mathcal{A}^{(2i)}+\mathrm{SK}\,\Pi'\mathrm{B}\,\mathcal{A}^{(2j)}+\mathrm{SH}\,\Pi'\mathcal{A}^{(2j+1)}+\mathrm{SL}\,\Pi'\mathrm{B}\,\mathcal{A}^{(2i-1)},$$
$$f(\alpha,\beta)=$$
$$\mathrm{S}\mathcal{G}\,\Pi'\mathrm{C}\mathcal{A}^{(2j)}+\mathrm{S}\mathcal{K}\,\Pi'\mathrm{CB}\mathcal{A}^{(2i-2)}+\mathrm{S}\mathcal{H}\,\Pi'\mathrm{C}\mathcal{A}^{(2i-1)}+\mathrm{S}\mathcal{L}\,\Pi'\mathrm{CB}\mathcal{A}^{(2j-1)},$$

où chaque produit Π' ne contient plus que deux facteurs l'un en α, l'autre en β; le facteur en γ, devenu constant en γ_0, étant maintenant compris dans le coefficient, qu'il faudra conséquemment diviser par ce facteur constant, avant de substituer sa valeur trouvée dans V (20).

§. CCVI.

ISOLEMENT DES SÉRIES PARTIELLES.

On peut isoler chacune des séries partielles (23), de la manière suivante : $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ étant une fonction de α et β, donnant aux variables des valeurs positives, comprises entre o et ϖ pour α, entre o et ϖ' pour β, soit posé

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha,\beta)&=\mathcal{F}_1,\\ \mathcal{F}(\alpha,-\beta)&=\mathcal{F}_2,\\ \mathcal{F}(-\alpha,\beta)&=\mathcal{F}_3,\\ \mathcal{F}(-\alpha,-\beta)&=\mathcal{F}_4.\end{aligned}\right.$$

Si $\mathcal{F}$ est F, ou $\mathfrak{F}$, les F_i, ou les $\mathfrak{F}_i$, représentent les températures fixes aux différents points des quatre triangles curvilignes, découpés sur la surface de l'hémi-ellipsoïde supérieur, ou inférieur, par les plans des sections principales; températures qui sont directement données en fonction des valeurs absolues des paramètres thermométriques α et β. Si $\mathcal{F}$ est f, ou f, les f_i, ou les f_i, seront respectivement les demi-sommes $\frac{\mathrm{F}_i+\mathfrak{F}_i}{2}$, ou les demi-différences $\frac{\mathrm{F}_i-\mathfrak{F}_i}{2}$, de ces températures fixes et données.

Si l'on considère maintenant la fonction $\mathfrak{F}$, comme étant composée de quatre parties : la première paire en α et en β, la seconde paire en α impaire en β, la troisième impaire en α paire en β, enfin la quatrième impaire en α et en β; ces quatre parties, exprimées par les $\mathfrak{F}_i$ (24) seront

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2+\mathfrak{F}_3+\mathfrak{F}_4}{4}, \\[2mm] \dfrac{\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2+\mathfrak{F}_3-\mathfrak{F}_4}{4}, \\[2mm] \dfrac{\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2-\mathfrak{F}_3-\mathfrak{F}_4}{4}, \\[2mm] \dfrac{\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2-\mathfrak{F}_3+\mathfrak{F}_4}{4}. \end{cases}$$

Si $\mathfrak{F}$ est f ou f, ces expressions (25) seront les quatre parties de la fonction f, ou f, et il suffira que les quatre séries partielles de la première ligne (23), ou de la seconde, soient respectivement égales à ces expressions, entre les limites, o et ϖ de α, o et ϖ' de β, pour que leur somme soit le développement de la fonction f(α, β), ou $f(\alpha, \beta)$.

La détermination de la série générale V (20) est ainsi ramenée à celle des coefficients de huit développements de la forme

$$(26)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sum \Gamma_z^{(n)} \mathrm{NM}\right) = \Phi(\alpha, \beta),$$

où le premier membre est l'une quelconque des séries partielles (23) : chaque produit Π' étant remplacé par ses deux facteurs, N en α, M en β; le double indice, donné au coefficient Γ, indiquant la valeur de n, et la racine z, qui particularisent le terme que multiplie ce coefficient; le premier sigma embrassant tous les entiers pairs, ou tous les entiers impairs, compris entre zéro et l'infini; le sigma subordonné comprenant un nombre limité de termes, égal au degré d'une seule des quatre équations en z qui correspondent à chaque valeur de n.

§ CCVII.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

Dans le développement partiel (26), quel qu'il soit parmi les huit, tous les groupes NM, ainsi que la fonction Φ, ont la même parité en α, et la même parité en β; la propriété signalée à la fin du § 202, est donc applicable à deux facteurs quelconques N et N$'$, ou M et M$'$, pris au hasard dans les termes du premier membre. De là résulte un théorème général, applicable aux huit développements partiels, et que l'on peut démontrer, sans spécifier celui d'entre eux que désigne l'équation (26).

Soient NM et N$'$M$'$, deux termes différents de la série (26), n et n', les valeurs de l'entier n, z et z', celles de la constante z qui leur correspondent; les polynômes N, M, N$'$, M$'$, vérifieront les quatre équations différentielles

$$\frac{d^2 N}{d\alpha^2}=[n(n+1)A^2-(1+k^2)z]N,$$

$$\frac{d^2 N'}{d\alpha^2}=[n'(n'+1)A^2-(1+k^2)z']N',$$

$$\frac{d^2 M}{d\beta^2}=[(1+k^2)z-n(n+1)A_1^2]M,$$

$$\frac{d^2 M'}{d\beta^2}=[(1+k^2)z'-n'(n'+1)A_1^2]M',$$

données par les deux premières (6), et d'où l'on conclut facilement

$$N\frac{d^2N'}{d\alpha^2}-N'\frac{d^2N}{d\alpha^2}=$$
$$(1+k^2)(z-z')NN'-[n(n+1)-n'(n'+1)]A^2NN',$$
$$M\frac{d^2M'}{d\beta^2}-M'\frac{d^2M}{d\beta^2}=$$
$$[n(n+1)-n'(n'+1)]A_1^2MM'-(1+k^2)(z-z')MM'.$$

Or si l'on multiplie respectivement ces deux équations par $d\alpha$, $d\beta$, et qu'on intègre entre les limites, o et ϖ de α, o et ϖ' de β, les premiers membres, dont les intégrales indéfinies sont $\left(N\frac{dN'}{d\alpha}-N'\frac{dN}{d\alpha}\right)$, $\left(M\frac{dM'}{d\beta}-M'\frac{dM}{d\beta}\right)$, s'évanouissent aux limites, § 202, et l'on a

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}&[n(n+1)-n'(n'+1)]\int_0^{\varpi}A^2NN'd\alpha\\&=(1+k^2)(z-z')\int_0^{\varpi}NN'd\alpha,\\&(1+k^2)(z-z')\int_0^{\varpi'}MM'd\beta\\&=[n(n+1)-n'(n'+1)]\int_0^{\varpi'}A_1^2MM'd\beta.\end{aligned}\right.$$

Si aucun des deux facteurs $[n(n+1)-n'(n'+1)]$, $(z-z')$, n'est nul, multipliant l'une par l'autre les deux équations (27), membre à membre, réunissant ensuite les deux intégrales doubles dans le même membre, et divisant par le produit $(1+k^2)[n(n+1)-n'(n'+1)](z-z')$, qui n'est pas nul par hypothèse, on aura

$$(28)\qquad\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi'}(A_1^2-A^2)MNM'N'd\alpha d\beta=0.$$

Si $n'(n'+1)=n(n+1)$, sans que $(z-z')$ soit nul, les équations (27) donnent

$$\int_0^{\varpi} \mathrm{NN}'\,d\alpha = 0, \qquad \int_0^{\varpi'} \mathrm{MM}'\,d\beta = 0,$$

d'où l'on conclut l'identité

$$(29)\quad \int_0^{\varpi} \mathrm{NN}'d\alpha.\int_0^{\varpi'} \mathrm{A}_1^2\,\mathrm{MM}'d\beta - \int_0^{\varpi'} \mathrm{MM}'d\beta.\int_0^{\varpi} \mathrm{A}^2\mathrm{NN}'\,d\alpha;$$

c'est-à-dire encore l'équation (28). Enfin, s'il peut arriver que $z' = z$ sans que $[n(n+1) - n'(n'+1)]$ soit nul (c'est-à-dire que les équations en z, correspondant à des valeurs différentes de n, aient des racines communes), les équations (27) donneront

$$\int_0^{\varpi} \mathrm{A}^2\,\mathrm{NN}'\,d\alpha = 0, \qquad \int_0^{\varpi'} \mathrm{A}_1^2\,\mathrm{MM}'\,d\beta = 0,$$

d'où l'on conclut encore l'identité (29), ou l'équation (28).

Ainsi, excepté dans le cas où $n' = n$, et $z' = z$, à la fois, l'équation (28) a lieu.

§ CCVIII.

DÉVELOPPEMENT PARTIEL.

Le théorème important (28) permet d'isoler chaque coefficient $\Gamma_z^{(n)}$ du développement (26) : on multipliera cette équation (26) par le facteur $(\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathrm{MN}\,d\alpha\,d\beta$, et intégrant entre les limites 0 et ϖ de α, 0 et ϖ' de β, tous les termes du premier membre disparaîtront, d'après le théorème (28), à l'exception de celui qui correspond à l'entier n et à la racine z que l'on a choisis, et l'on aura

$$(30)\qquad \Gamma_z^{(n)} = \frac{\displaystyle\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi} \Phi(\alpha,\beta)\,(\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathrm{NM}\,d\alpha\,d\beta}{\displaystyle\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi} (\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathrm{N}^2\mathrm{M}^2\,d\alpha\,d\beta}.$$

Transportant aux facteurs N et M les indices de la constante, indiquant les variables et remplaçant α par θ, β par ψ sous les intégrales définies, on aura

$$\Gamma_s^{(n)} = \frac{\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi} \Phi(\theta,\psi)\,[A_1^2(\psi) - A^2(\theta)]\, N_s^{(n)}(\theta)\, M_s^{(n)}(\psi)\, d\theta\, d\psi}{\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi} [A^2(\psi) - A^2(\theta)]\, N_s^{2(n)}(\theta)\, M_s^{2(n)}(\psi)\, d\theta\, d\psi}$$

et avec cette valeur, la double série (26), mise sous la forme

$$(31) \qquad \Phi(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\sum_{s=s_0}^{s=s_{n'}} \Gamma_s^{(n)} N_s^{(n)}(\alpha)\, M_s^{(n)}(\beta) \right),$$

donnera le développement de l'une quelconque des quatre parties de la fonction $f(\alpha,\beta)$ ou $\mathcal{f}(\alpha,\beta)$ (23), à l'aide des fonctions inverses des transcendantes α et β. Les facteurs N, M, de chaque terme de la série (31) sont deux polynômes de degré n, composés de la même manière, le premier en (A, B, C), le second en (A_1, B_1, C_1), sous l'une des formes (18), la même pour tous les termes. Le sigma principal embrasse tous les entiers pairs ou tous les entiers impairs compris entre zéro et l'infini. Les indices du sigma subordonné supposent que, pour chaque valeur de n, les $n'+1$ racines, toutes réelles, et rangées par ordre de grandeur, de la seule des quatre équations en z qui soit employée, sont désignées par $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n'}$; ils indiquent que ce sigma comprend les $n'+1$ termes correspondants à ces racines; l'entier n' prend les huit valeurs $\frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{2}$, et $\frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-3}{2}$, quand la formule (31) est successivement appliquée aux séries partielles de $f(\alpha,\beta)$, et à celles de $\mathcal{f}(\alpha,\beta)$ (23).

§ CCIX.

PREMIÈRE FORME DE LA SOLUTION.

Si l'on désigne par $R_s^{(n)}(\gamma)$ le facteur en γ de la fonction isotherme qui a donné la partie variable de chaque terme du développement (31), il faudra diviser le coefficient $\Gamma_s^{(n)}$ (30) par $R_s^{(n)}(\gamma_0)$, pour en déduire le coefficient du terme ayant les mêmes indices, dans celle des séries (20) à laquelle répond ce développement; terme qui contiendra en outre le facteur $R_s^{(n)}(\gamma)$. Autrement, si l'on donne à chaque terme du développement (31), le nouveau facteur $\frac{R_s^{(n)}(\gamma)}{R_s^{(n)}(\gamma_i)}$, on obtiendra une des huit séries partielles de V (20). Toutes ces séries seront donc complétement déterminées, en prenant successivement pour Φ, sous les intégrales doubles, les quatre valeurs (25), exprimées par les f_i, puis par les f_i; fonctions partielles dont la formation, à l'aide des fonctions données F et $\mathcal{F}$, a été suffisamment indiquée au § 206.

§ CCX.

SECONDE FORME DE LA SOLUTION.

Cette première forme de la solution complète du problème proposé a l'avantage de montrer de quelle manière se compose, avec les températures données, chacune des huit séries partielles de la fonction V (20); mais on peut donner à cette solution une seconde forme plus concise, et qui la rapproche de celle de la sphère. Les éléments des intégrales doubles qui composent le coefficient $\Gamma_s^{(n)}$ (30) sont des fonctions paires en α et en β; on peut donc étendre les limites des deux intégrations de $-\varpi$ à $+\varpi$, de $-\varpi'$ à $+\varpi'$, ce qui ne fera que quadrupler à la fois le numérateur et le dénominateur. Alors on pourra ajouter à Φ, qui est une des quatre parties (25) de f ou de f, les trois autres parties de la même fonction; car elles disparaîtront d'elles-mêmes par la double intégration, comme n'ajoutant à l'élément que des fonctions impaires, soit en α, soit en β, soit en α et en β. De là résultera que le coefficient $\Gamma_s^{(n)}$ aura la même forme pour les quatre développements partiels (23) de la même fonction $\mathrm{f}(\alpha, \beta)$ ou $f(\alpha, \beta)$. On est ainsi conduit à la solution suivante :

Conservant les lettres N, M pour désigner les facteurs des deux premières formes (18), soient représentés par $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ ceux des deux dernières, quelle que soit d'ailleurs la parité de l'entier n; les développements (23) s'écriront ainsi :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta) + \mathfrak{F}(\alpha, \beta)}{2} &= \mathrm{f}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sum \mathrm{G}_s^{(n)} \mathrm{NM}\right), \\ \frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta) - \mathfrak{F}(\alpha, \beta)}{2} &= f(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sum \mathcal{G}_s^{(n)} \mathcal{N}\mathcal{M}\right); \end{aligned}\right.$$

les valeurs générales des coefficients seront

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{G}_s^{(n)} &= \frac{\displaystyle\int_{-\varpi'}^{+\varpi'}\int_{-\varpi}^{+\varpi} \mathrm{f}(\alpha, \beta)(\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathrm{NM}\,d\alpha\,d\beta}{\displaystyle\int_{-\varpi'}^{+\varpi'}\int_{-\varpi}^{+\varpi} (\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathrm{N}^2\mathrm{M}^2\,d\alpha\,d\beta}, \\ \mathcal{G}_s^{(n)} &= \frac{\displaystyle\int_{-\varpi'}^{+\varpi'}\int_{-\varpi}^{+\varpi} f(\alpha, \beta)(\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathcal{N}\mathcal{M}\,d\alpha\,d\beta}{\displaystyle\int_{-\varpi'}^{+\varpi'}\int_{-\varpi}^{+\varpi} (\mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A}^2)\,\mathcal{N}^2\mathcal{M}^2\,d\alpha\,d\beta}, \end{aligned}\right.$$

et, si l'on désigne par R et $\mathfrak{R}$, les facteurs en γ conjugués de ceux N et $\mathcal{N}$ en α, M et $\mathcal{M}$ en β, la fonction cherchée V prendra la forme

$$(34)\quad V=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\sum G_z^{(n)}\frac{R(\gamma)}{R(\gamma_0)}M(\beta)N(\alpha)+\sum \mathcal{G}_z^{(n)}\frac{\mathfrak{R}(\gamma)}{\mathfrak{R}(\gamma_0)}\mathfrak{M}(\beta)\mathfrak{N}(\alpha)\right]$$

où les deux sigmas subordonnés se partagent les $2n+1$ fonctions isothermes, correspondant à toute valeur de n; chacun d'eux employant les racines de deux des quatre équations en z.

§ CCXI.

NOUVELLE SOLUTION POUR LA SPHÈRE.

Dans l'exemple IV, qui concerne la sphère, si les températures fixes de la surface étaient données par une fonction compliquée de la longitude et de la latitude, et au contraire par une fonction simple des coordonnées (α, β) du système général défini au § 103, il serait préférable d'exprimer la température V dans ce même système. Cette nouvelle forme de la solution pour la sphère se déduit de celle (34) pour l'ellipsoïde à trois axes, en remplaçant les facteurs en γ par $\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$, ce qui donne immédiatement

$$(35)\quad V=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\sum G_z^{(n)}N(\alpha)M(\beta)+\sum \mathcal{G}_z^{(n)}\mathfrak{N}(\alpha)\mathfrak{M}(\beta)\right]\left(\frac{\rho}{r}\right)^n;$$

d'après le procédé de transformation tant de fois employé et que trace le § 103.

En réalité, le groupe [(32), (33)] donne une infinité de développements différents, qui appartiennent respectivement à toutes les valeurs possibles du module k. La série V (34) est exclusivement fondée sur celui de ces développements qui correspond à l'ellipsoïde considéré. Mais la série V (35) peut les employer tous successivement ; et s'il s'agit de la même sphère, des mêmes températures fixes à sa surface, données par des fonctions f et f différant avec le module ou avec le système des fonctions inverses, l'identité nécessaire de toutes ces expressions de V exige que la parenthèse qui multiplie $\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ ait identiquement la même valeur dans toutes les séries. Ce qui conduit à des relations entre les fonctions isothermes des divers systèmes ellipsoïdaux ; relations que la sphère, ou l'asymptote commune à tous ces systèmes, devait et pouvait seule établir.

VINGTIÈME LEÇON.

Propriétés de la solution trouvée pour le cas de l'ellipsoïde à trois axes. — Surfaces isothermes algébriques. — Classement des développements en séries. — Questions relatives aux fonctions isothermes du système ellipsoïdal.

§ CCXII.

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES.

L'objet de cette dernière leçon est de signaler les propriétés caractéristiques et distinctives des développements en séries appartenant au système ellipsoïdal. Voici d'abord la plus remarquable.

Si l'on rapproche les formules (20) du § 167, qui expriment les coefficients généraux des développements en séries, relatifs à la sphère et aux ellipsoïdes de révolution, des formules (33) du § 210, qui donnent les coefficients des séries relatives à l'ellipsoïde à trois axes; on remarque que dans les premières le dénominateur est le produit de deux intégrales définies simples, qui sont ω_l, c'est-à-dire π ou $\frac{\pi}{2}$, et $p_l^{(n)}$ dont la valeur (31), § 171, est un produit de fractions numériques; que dans les secondes le dénominateur est exprimé par une intégrale définie double, qui n'est pas le produit de deux intégrales définies simples. Tout porterait à penser que l'intégrale double, dont il s'agit, doit s'exprimer à l'aide des deux nombres ϖ et ϖ', au lieu de π. Or il n'en est pas ainsi; car, comme on va le voir, le nouveau dénominateur n'introduit aucun nouveau nombre transcendant : il est définitivement égal à π, multiplié par une fonction rationnelle et entière du module k et d'une des racines z. Cette forme imprévue, ce retour inespéré au seul nombre π, cette espèce de refus d'amener de nouvelles complications, constituent le caractère le plus important de la solution générale qui nous occupe.

§ CCXIII.

FORMULES DE RÉDUCTION IDENTIQUES.

Soit proposé d'évaluer l'intégrale définie double

$$(1) \qquad \int_0^{\varpi'} \int_0^{\varpi} (A_1^2 - A^2)\, \mathcal{A}\mathcal{A}_1\, d\alpha\, d\beta,$$

dans laquelle $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1$ sont des polynômes identiques, l'un en A^2, l'autre en A_1^2. Le produit AA_1A_2 est une fonction isotherme du système ellipsoïdal, laquelle correspond à $n=1$ et à la racine $z=1$; substituant ces valeurs de n et z, et remplaçant N par A, M par A_1 dans les premières formules du § 207, il vient

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\alpha^2} &= 2A^3 - (1+k^2)A, \\ \frac{d^2 A_1}{d\beta^2} &= (1+k^2)A_1 - 2A_1^3, \end{aligned} \right.$$

équations différentielles dont l'établissement direct est d'ailleurs facile. Maintenant, i étant un entier positif quelconque, multiplions respectivement les équations (2) par $A^{2i+1}\,d\alpha$, et par $A_1^{2i+1}\,d\beta$; intégrons entre les limites, o et ϖ de α, et o et ϖ' de β; les premiers membres seront, à l'aide de l'intégration par parties,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(A^{2i+1}\cdot\frac{dA}{d\alpha}\right)_0^{\varpi} - (2i+1)\int_0^{\varpi} A^{2i}\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 d\alpha, \\ &\left(A_1^{2i+1}\cdot\frac{dA_1}{d\beta}\right)_0^{\varpi'} - (2i+1)\int_0^{\varpi'} A_1^{2i}\left(\frac{dA_1}{d\beta}\right)^2 d\beta. \end{aligned} \right.$$

Or on a, d'après les tableaux (5) et (6) du § 37,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dA}{d\alpha} = BC, \qquad \left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 = A^4 - (1+k^2)A^2 + k^2,\\ &\frac{dA_1}{d\beta} = B_1 C_1, \qquad \left(\frac{dA_1}{d\beta}\right)^2 = -A_1^4 + (1+k^2)A_1^2 - k^2; \end{aligned}\right.$$

d'où il suit que les parties intégrées des expressions (3) s'évanouissent aux limites des intégrations : la première, pour $\alpha = 0$ par A, et pour $\alpha = \varpi$ par B facteur de $\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)$; la seconde, pour $\beta = 0$ par B_1, et pour $\beta = \varpi'$ par C_1, tous deux facteurs de $\frac{dA_1}{d\beta}$. Substituant alors sous les intégrales définies (3) les valeurs (4) des carrés des dérivées; égalant aux intégrales des seconds membres (2), et réunissant, on a, entre o et ϖ pour α, entre o et ϖ' pour β,

$$(5)\quad \begin{aligned} &\int A^{2i+4}\,d\alpha = \frac{2i+2}{2i+3}(1+k^2)\int A^{2i+2}\,d\alpha - \frac{2i+1}{2i+3}k^2\int A^{2i}\,d\alpha,\\ &\int A_1^{2i+4}\,d\beta = \frac{2i+2}{2i+3}(1+k^2)\int A_1^{2i+2}\,d\beta - \frac{2i+1}{2i+3}k^2\int A_1^{2i}\,d\beta; \end{aligned}$$

formules de réduction identiques.

§ CCXIV.

FORMULES GÉNÉRALES D'INTÉGRATION.

Avec ces formules (5), si l'on pose

$$(6)\qquad \int_0^{\varpi} A^2\,d\alpha = \omega, \qquad \int_0^{\varpi'} A_1^2\,d\beta = \omega',$$

on aura d'abord, pour $i = 0$,

$$\int_0^{\varpi} A^4\, d\alpha = \frac{2}{3}(1 + k^2).\omega - \frac{1}{3}k^2.\varpi,$$

$$\int_0^{\varpi'} A_1^4 d\beta = \frac{2}{3}(1 + k^2).\omega' - \frac{1}{3}k^2.\varpi',$$

puis, faisant successivement $i = 1, 2, 3, \ldots$, et substituant à chaque fois, dans les seconds membres, les résultats précédemment obtenus, on arrivera toujours à des couples de valeurs ayant la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\varpi} A^{2j}\, d\alpha = g.\omega - h.\varpi, \\ &\int_0^{\varpi'} A_1^{2j}\, d\beta = g.\omega' - h.\varpi', \end{aligned} \right.$$

où, l'entier j étant le même dans les deux équations, g et h seront les mêmes fonctions entières de k^2.

Par ce premier théorème, et d'après l'identité de forme des polynômes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1$, on aura

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\varpi} \mathcal{A}\, d\alpha = G.\omega - H.\varpi, \\ &\int_0^{\varpi'} \mathcal{A}_1 d\beta = G.\omega' - H.\varpi', \end{aligned} \right.$$

car les premiers membres seront des sommes identiques, ou avec les mêmes coefficients, d'une suite d'intégrales définies des formes conjuguées (7); et G, H seront les mêmes fonctions de k^2 et des coefficients des $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$, dans les deux équations (8). On aura pareillement

$$(9)\qquad \begin{cases} \int_0^{\varpi} A^2 \mathcal{A}_0\, d\alpha = \mathcal{G}.\omega - \mathfrak{H}.\varpi, \\ \int_0^{\varpi'} A_1^2 \mathcal{A}_1\, d\beta = \mathcal{G}.\omega' - \mathfrak{H}.\varpi'; \end{cases}$$

$\mathcal{G}$ et $\mathfrak{H}$ étant d'autres fonctions entières de k^2 et des coefficients des $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$, qui seront encore les mêmes dans ces deux équations (9).

§ CCXV.

DISPARITION DES NOMBRES TRANSCENDANTS.

Or, si l'on retranche du produit de la seconde (9) par la première (8), le produit de la seconde (8) par la première (9), il vient

$$\int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi}(A_1^2 - A^2)\,\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1\, d\alpha\, d\beta = (\mathfrak{H}G - \mathcal{G}H)(\omega'\varpi - \omega\varpi'),$$

et puisque

$$\omega'\varpi - \omega\varpi' = \int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi}(A_1^2 - A^2)\, d\alpha\, d\beta = \frac{\pi}{2},$$

d'après le § 104, on peut écrire plus simplement

$$(10)\qquad \int_0^{\varpi'}\int_0^{\varpi}(A_1^2 - A^2)\,\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1\, d\alpha\, d\beta = \pi.\Gamma,$$

Γ étant une fonction entière de k^2 et des coefficients des polynômes $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$.

Sous les intégrales doubles qui servent de dénominateurs aux valeurs (33) du § 210, les produits $N^2 M^2$, $\mathfrak{N}^2 \mathfrak{M}^2$ ont, dans tous les cas, la forme supposée du produit $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$. Donc chacun de ces dénominateurs sera, d'après la formule (10), le produit de π par une fonction entière du module k et d'une racine z. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, par la double intégration et par la forme du facteur $(A_1^2 - A^2)\,d\alpha\,d\beta$, le dénominateur du coefficient général, dans le développement en série appartenant au système ellipsoïdal, se trouve dégagé, non-seulement des nombres transcendants ϖ et ϖ', mais aussi des autres nombres ω et ω' (6), qui appartiennent aux transcendantes elliptiques de seconde espèce. Fait analytique très-digne d'être signalé, et qui pourrait, à lui seul, expliquer la forme essentielle de la solution trouvée.

§ CCXVI.

LIMITES DES COORDONNÉES (α, β, γ).

Le but principal des dernières leçons était de constater que les fonctions inverses (A_i, B_i, C_i) jouissent de la propriété de composer des séries capables de représenter des fonctions données, aussi bien que les sinus et cosinus. Ce but est atteint et même dépassé, car il eût suffi d'établir une seule de ces séries nouvelles. On pouvait supposer, par exemple, que les températures fixes à la surface de l'ellipsoïde étaient distribuées symétriquement, et de la même manière, sur les huit triangles curvilignes découpés par les plans orthogonaux des sections principales. Ce qui eût réduit la fonction V (20) du § 204 à sa première série partielle, et le développement (31) du § 208 à celui de la fonction paire en α et en β, représentant à elle seule toutes les températures données. Mais en restreignant ainsi la question posée dans le dernier exemple, comme dans le troisième concernant le prisme rectangle, on passait sous silence une circonstance remarquable que présente l'emploi des coordonnées thermométriques (α, β, γ).

Quand il s'agit de la sphère ou des ellipsoïdes de révolution, en faisant varier l'angle azimutal des plans méridiens de 0 à 2π, et μ de -1 à $+1$, on atteint tous les points de la surface du corps sans faire intervenir la troisième coordonnée. Quand il s'agit de l'ellipsoïde à trois axes, les limites naturelles des coordonnées, qui suffisent pour assigner tous les points de l'espace, sont $-\varpi$ et $+\varpi$ pour α, $-\varpi'$ et $+\varpi'$ pour β, $-\varpi$ et $+\varpi$ pour γ. Faut-il troubler cette symétrie, qui s'accorde si bien avec celle des fonctions inverses et celle des fonctions isothermes, afin de pouvoir représenter tous les points de la surface du corps à l'aide de deux coordonnées seulement, en faisant varier α de 0 à 4ϖ et β de $-\varpi'$ à $+\varpi'$, ou bien α de $-\varpi$ à $+\varpi$ et β de 0 à $4\varpi'$, et n'admettant que des valeurs positives de γ? Alors lequel choisir des paramètres α et β pour l'assimiler à la longitude?

Il était utile de montrer comment on évite ce trouble et ce choix embarrassant : les §§ 205 et 206 développent la méthode qu'il faut employer pour cela. Il est d'ailleurs évident que si l'on adoptait une autre méthode ou d'autres limites des variables, lors des doubles intégrations, les valeurs numériques des coefficients seraient identiquement les mêmes; car, quel qu'il soit, le procédé d'élimination qu'on emploie pour isoler chaque coefficient ne peut altérer la seule fonction V qui remplira toutes les conditions imposées.

Si l'on considère les variables dans cette fonction même, on remarque d'abord que la valeur absolue de γ, paramètre des ellipsoïdes isothermes, ne peut dépasser γ_0 qui appartient à la surface du corps, autrement la série V deviendrait divergente. Quant aux paramètres α et β, ils n'ont pas de limites nécessaires; mais s'il arrive qu'une suite de valeurs données à l'une de ces deux variables répondent au même point du solide, il faut que la fonction V soit la même pour toutes. Or le système des coordonnés thermométriques (α, β, γ) est tel, qu'on revient aux mêmes points en augmentant α de 4ϖ ou β de $4\varpi'$, on pouvait donc prévoir que ces variables n'entreraient dans V que sous les fonctions inverses (A, B, C), (A_1, B_1, C_1).

§ CCXVII.

SURFACES ISOTHERMES ALGÉBRIQUES.

Les surfaces isothermes, que l'on obtient en égalant à des constantes les $2n+1$ fonctions isothermes de degré n du système ellipsoïdal, sont toutes des surfaces algébriques. En effet, les formules de transformation (3), § 81, donnent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} AA_1A_2 &= \frac{kx}{c},\\ BB_1B_2 &= \frac{kk'y}{c},\\ CC_1C_2 &= \frac{k'z}{c},\end{aligned}\right.$$

et les A_i^2 étant les trois racines de l'équation

$$\frac{x^2}{A_i^2}+\frac{y^2}{A_i^2-k^2}+\frac{z^2}{A_i^2-1}=c^2,$$

qui est, en la développant

$$A_i^6-\left(1+k^2+\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}\right)A_i^4$$
$$+\left(k^2+\frac{(1+k^2)x^2+y^2+k^2z^2}{c^2}\right)A_i^2-\frac{k^2x^2}{c^2}=0,$$

on a les relations connues

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} A^2 + A_1^2 + A_2^2 &= 1 + k^2 + \frac{x^2+y^2+z^2}{c^2},\\ A_1^2A_2^2 + A_2^2A^2 + A^2A_1^2 &= k^2 + \frac{(1+k^2)x^2+y^2+k^2z^2}{c^2},\\ A^2A_1^2A_2^2 &= \frac{k^2x^2}{c^2}; \end{aligned}\right.$$

d'où résulte, comme l'on sait, que toute fonction symétrique $\mathfrak{F}$ de (A^2, A_1^2, A_2^2) sera exprimable algébriquement à l'aide des seconds membres des équations précédentes.

Or, en supprimant les facteurs constants, les quatre formes (17), § 198, des fonctions isothermes du système ellipsoïdal, exprimées en (x, y, z), seront, d'après les relations (11) : la première une fonction $\mathfrak{F}$, multipliée par x si n est impair, par l'unité s'il est pair; la seconde une fonction $\mathfrak{F}$, multipliée par xy si n est pair, par y seul s'il est impair; la troisième une fonction $\mathfrak{F}$, multipliée par xz si n est pair, par z seul s'il est impair; enfin, la quatrième une fonction $\mathfrak{F}$ multipliée par xyz si n est impair, par yz seulement s'il est pair. Toutes ces fonctions isothermes seront donc algébriques en (x, y, z), et de plus rationnelles et entières.

Ainsi, dans le système des coordonnées ellipsoïdales et thermométriques (α, β, γ), qui sont transcendantes, les fonctions isothermes s'expriment algébriquement; et, dans le système des coordonnées rectilignes et thermométriques (x, y, z), qui sont algébriques, les fonctions isothermes sont transcendantes. Cette réciprocité n'est-elle que curieuse? Ne serait-elle pas l'indice d'une loi générale? Quoi qu'il en soit, elle sépare très-nettement les développements en séries appartenant aux systèmes ellipsoïdaux, y compris la sphère et les ellipsoïdes de révolution, de ceux qui concernent le prisme rectangle, et les polyèdres en général.

§ CCXVIII.

CLASSES DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

Il existe une autre différence caractéristique, entre ces deux classes de développements en séries. Dans celle qui provient du prisme rectangle, il n'y a réellement que des développements simples ou d'une seule variable, qui, par leur superposition, soit successive dans un ordre indifférent, soit simultanée, conduisent aux développements des fonctions de plusieurs variables, comme on l'a vu dans l'exemple III. Le théorème fondamental (9), § 155, qui suffit à tous, consiste en ce que, X et X' étant des facteurs d'une seule variable, pris dans deux fonctions isothermes différentes, leur produit, multiplié par la différentielle de la variable, ou par l'élément linéaire, puis intégré entre les limites de cette variable, donne une intégrale définie simple, qui est identiquement nulle.

Dans la classe provenant de l'ellipsoïde à trois axes, les développements sont essentiellement à deux variables α et β. Le théorème fondamental consiste en ce que, NM et $N'M'$ étant les produits partiels des facteurs en α et en β, pris dans deux fonctions isothermes différentes, leur produit total, multiplié par $(A_1^2 - A^2)\, d\alpha\, d\beta$, ou par l'élément de surface de la sphère de rayon 1, § 104, puis intégré entre les limites des deux variables, donne une intégrale définie double, qui est identiquement nulle.

§ CCXIX.

EXCEPTION RELATIVE AU SYSTÈME SPHÉRIQUE.

Les cas extrêmes de la sphère et des ellipsoïdes de révolution font exception. Les développements en séries qui en proviennent ne sont que la superposition du développement simple dû au prisme rectangle, qu'introduit la famille isotherme des plans méridiens, et du développement, simple aussi, en série des fonctions $P_l^{(n)}(\mu)$. Pour ce dernier, le théorème fondamental consiste en ce que, P et P′ étant deux facteurs en μ seul, pris dans deux fonctions isothermes différentes, mais correspondant au même entier l, leur produit, multiplié par $d\mu$, puis intégré de -1 à $+1$, donne une intégrale définie simple, qui est identiquement nulle.

Il faut remarquer que cette superposition, quand elle est successive, doit se faire nécessairement dans l'ordre de l'exemple IV. On ne pourrait pas finir par le développement en $\cos l\psi$ et en $\sin l\psi$ et commencer par le développement en $P_l^{(n)}(\mu)$; à moins que le nombre l ne fût nul, mais alors la fonction à développer n'aurait d'autre variable que μ. Il serait au contraire impossible de développer cette fonction, si elle ne contenait d'autre variable que l'angle azimutal des plans méridiens.

Quand la superposition est simultanée, le théorème fondamental est celui-ci : les produits partiels $P_l^{(n)}(\mu)\,Q(l\psi)$, $P_{l'}^{(n')}(\mu)\,Q(l'\psi)$, différant par l'un des indices l et n, ou par les deux à la fois, leur produit total, multiplié par $d\mu\,d\psi$, ou par l'élément de surface de la sphère de rayon 1, puis intégré entre les limites de μ et de ψ, donne une intégrale double, qui est identiquement nulle. C'est exactement la loi du système ellipsoïdal.

Ainsi, pour isoler le coefficient général de la double série, si l'on emploie la superposition successive, l'ordre de succession n'est pas indifférent, comme dans le système des coordonnées rectilignes; et si l'on emploie la superposition simultanée, c'est comme si l'on appliquait la méthode de l'ellipsoïde à trois axes. L'exception est donc fort incomplète, et l'on peut dire que les développements en séries, provenant de la sphère et des ellipsoïdes de révolution, appartiennent beaucoup plus à la seconde classe qu'à la première. On reconnaît facilement que la méthode d'élimination, si fréquemment employée par Laplace dans la *Mécanique céleste*, se ramène à celle de la superposition simultanée.

§ CCXX.

QUESTIONS SUR LES FONCTIONS ISOTHERMES.

Les fonctions isothermes du système ellipsoïdal pourraient-elles s'exprimer par les produits des fonctions inverses de certains multiples des transcendantes (α, β, γ), appartenant au module k ou à un autre, avec ou sans addition de compléments constants? Cette question a été agitée par plusieurs géomètres et entre autres par Jacobi. Diverses observations paraissent conduire à une réponse négative; telles sont les deux suivantes :

I. Si la forme présumée existait, elle se retrouverait dans les deux systèmes des ellipsoïdes de révolution et dans le système sphérique; le facteur relatif à l'angle azimutal a, il est vrai, la forme cherchée; mais la fonction $\mathfrak{P}_l^{(n)}$ de l'ellipsoïde planétaire, $P_l^{(n)}$ de l'ellipsoïde ovaire, ou $P(\mu)$ de la sphère, ne l'a pas et ne saurait la prendre : car cette fonction n'est pas égale généralement au sinus ou au cosinus d'un multiple de la latitude.

II. Si tout facteur des fonctions isothermes de l'ellipsoïde était une fonction inverse, appartenant au module k ou à un autre, de la transcendante multipliée par un nombre constant, les solutions générales des problèmes de la multiplication et de la transformation des transcendantes elliptiques, montrent que ce facteur ne pourrait s'exprimer à l'aide des (A_i, B_i, C_i) que par une fraction algébrique; et les facteurs qu'il s'agit d'interpréter sont essentiellement dépourvus de tout dénominateur variable.

Tout porte donc à considérer les fonctions isothermes du système ellipsoïdal, et leurs facteurs, comme des fonctions nouvelles, ou différant de celles qui ont été découvertes et étudiées par Jacobi. Quoi qu'il en soit, ces fonctions sont clairement établies par le problème de physique mathématique qui les a signalées, et dont elles expriment la solution. Cette origine même est leur définition physique. On reconnaît aussi leur définition géométrique dans le nombre infini de familles de surfaces isothermes algébriques, dont elles assignent les formes et les propriétés. Ont-elles encore une troisième définition, appartenant à la théorie pure des transcendantes elliptiques? Question épineuse et difficile, que le digne émule d'Abel et de Jacobi, dans la découverte des lois analytiques qui régissent les fonctions inverses, pourrait seul résoudre.